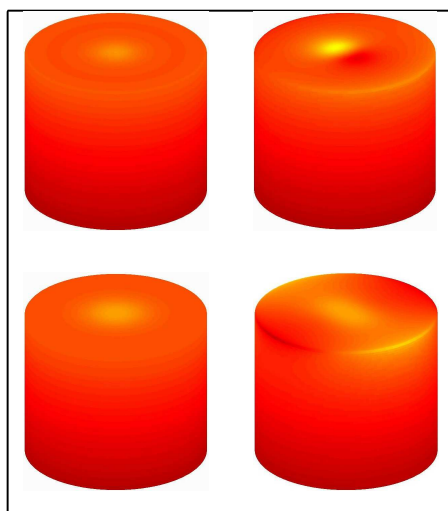




UNIVERSIDADE DA MADEIRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA



# Modelação da Interacção entre um Plasma de Arco de Alta Pressão e Cátodos Refractários

Mário Dionísio Cunha

Dissertação para a obtenção do grau de Doutor em Física

Funchal, Maio de 2004

À minha esposa, Marta,  
e aos meus filhos, André e Artur.

# Agradecimentos

Estou profundamente agradecido ao meu orientador, Professor Mikhail Benilov, por me ter aberto a porta do mundo fascinante da física dos plasmas e pela disponibilidade, atenção e constante apoio que sempre manifestou na realização das tarefas desta dissertação. Agradeço também a possibilidade que me deu de poder partilhar a sua experiência de cientista, a qual influenciou de forma indelével a minha evolução científica. Quero agradecer também o apoio financeiro, através dos seus projectos de investigação, que me concedeu para poder apresentar os resultados desta dissertação em várias conferências científicas internacionais. Estou muito agradecido ao "Fundamentals of Electrical Engineering Group" da "Ruhr University of Bochum", na pessoa do Professor Jürgen Mentel, pela cedência dos dados experimentais que contribuíram para a validação do modelo desenvolvido nesta dissertação. Agradeço ao meu colega de Departamento, Dr. Nelson Almeida, pela sua constante disponibilidade para me ajudar na resolução de problemas informáticos.

# Prefácio

O trabalho apresentado nesta dissertação refere-se a um estudo detalhado de vários aspectos da interacção entre um plasma de arco de alta pressão e cátodos refractários e foi desenvolvido no Departamento de Física da Universidade da Madeira entre 1999 e 2003 no âmbito dos seguintes projectos:

-Teoria e Modelação da Interacção Plasma-Cátodo em Descargas de Arco de Alta Pressão. Projecto financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia com início em Outubro de 2000 e duração de 46 meses. Este projecto teve como participantes os Departamentos de Física e de Matemática da Universidade da Madeira e contou com a colaboração dos grupos de Oxford, de Bochum, de Moscovo e de Toulouse;

-«Efficient Lighting for the 21st Century», COST n<sup>o</sup> 529. Trata-se de uma rede europeia criada no âmbito da COST («Technical Committee Materials») da União Europeia. O Departamento de Física da Universidade da Madeira participa neste projecto juntamente com um conjunto de várias dezenas de instituições europeias da indústria e instituições universitárias. O projecto começou em 2001 e será desenvolvido ao longo de 5 anos;

-«Integrate Approach to Designing High Intensity Discharge Lighting Systems». Projecto financiado pela União Europeia, através do programa Energia, Ambiente e Desenvolvimento Sustentado. O projecto teve início em Janeiro de 2002 e durará 36 meses.

Os resultados do trabalho desenvolvido nesta dissertação encontram-se já publicados nos seguintes artigos:

-”Heating of refractory cathodes by high-pressure arc plasmas. I ”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, J. Phys. D: Appl. Phys. **35**(14), 1736-1750 (2002);

-”Heating of refractory cathodes by high-pressure arc plasmas. II ”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, J. Phys. D: Appl. Phys. **36**(6), 603-614 (2003);

-”Bifurcation points in the theory of axially symmetric arc cathodes”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, Phys. Rev. E **68**, 056407 (2003).

O conteúdo dos capítulos 2, 3 e 4 desta dissertação corresponde essencialmente ao conteúdo dos artigos mencionados.

A divulgação do trabalho desenvolvido nesta dissertação foi feita também em várias conferências científicas, onde foram apresentados os seguintes trabalhos:

-”Self-Consistent Modelling of Arc-Cathode Interaction in HID Lamps”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, Bull. Amer. Phys. Soc., 53rd Gaseous Electronics Conference, Vol. 45, No. 6, 18 (Houston, Texas, USA, October 24-27, 2000);

-”Self-Consistent Modelling of Arc-Cathode Interaction in High-Pressure Arc Discharges”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, Proceedings of 15th International Sym-

- 
- posium on Plasma Chemistry, Vol. II, 503-508 (Orléans, France, July 9-13, 2001);
- ”Modelling of Temperature Distributions in Cathodes of High-Pressure Arc Discharges”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, Proceedings of XXV International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Vol. I, 105-106 (Nagoya, Japan, July 17-22, 2001);
- ”Modelling the Temperature Distribution in Cathodes of HID Lamps”, Mikhail Benilov and Mário Cunha, Proceedings of 9th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, 231-232 (Ithaca, New York, USA, August 12-16, 2001);
- ”Simulation of the Diffuse and Spot Modes of Current Transfer to Thermionic Cathodes”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, Proceedings of 30th International Conference on Plasma Science, 385 (Jeju, Korea, June 2-5, 2003);
- ”Numerical Calculation of Stability Limit of Diffuse Discharge on Thermionic Cathodes”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, Proceedings of 16th International Symposium on Plasma Chemistry, 263 (Taormina, Italy, June 22-27, 2003);
- ” Numerical Investigation of Diffuse and Spot Modes of Current Transfer to Thermionic Cathodes”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, Proceedings of XXVI International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Vol. II, 29-30 (Greifswald, Germany, July 15-20, 2003);
- ”Calculating Stability Limit of Diffuse Discharge on Thermionic Cathodes”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, Proceedings of XXVI International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Vol. II, 31-32 (Greifswald, Germany, July 15-20, 2003);
- ”Numerical Modelling of Stability Limit of Diffuse Discharge on Thermionic Cathodes”, M. S. Benilov and M. D. Cunha, Bull. Amer. Phys. Soc., 56th Gaseous Electronics Conference, Vol. 48, No. 6, 85 (San Francisco, California, USA, October 21-24, 2003).

# Resumo

Nesta dissertação apresento um estudo detalhado de vários aspectos da interacção entre um plasma de arco de alta pressão e cátodos refractários. Um modelo da camada de plasma junto ao cátodo num plasma sujeito a uma pressão da ordem de uma ou várias atmosferas é reconsiderado com base em recentes resultados teóricos. A física da camada de plasma junto ao cátodo é analisada para valores da queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo até 50 V, de acordo com recentes resultados experimentais que mostram que a queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo numa descarga de arco de alta pressão pode atingir valores tão elevados. São identificados os mecanismos que originam a não monotonia da dependência da densidade de fluxo de energia (proveniente do plasma para a superfície do cátodo) em relação à temperatura da superfície do cátodo, para um valor fixo da queda de tensão junto ao cátodo. Uma descrição fechada da interacção plasma-cátodo é obtida por meio da resolução numérica do problema não linear com condições de fronteira para a distribuição da temperatura no interior do corpo do cátodo. São apresentados resultados da modelação numérica da descarga difusa nas condições de funcionamento de uma lâmpada de descarga experimental, sendo bom o acordo entre os resultados numéricos e os dados experimentais.

Manchas solitárias num cátodo plano infinito e modos difuso e mancha axialmente simétricos em cátodos finitos de descargas de arco de alta pressão são estudados num grande intervalo de corrente. São analisados aspectos gerais e apresentados resultados numéricos referentes a cátodos de tungsténio planos e de forma cilíndrica a operar num plasma de argon à pressão atmosférica para correntes de arco até 100 kA. É mostrado, em particular, que a temperatura da superfície do cátodo no interior de uma mancha solitária varia relativamente pouco, podendo ser estimada com uma precisão de cerca de 200 – 300 K sem ser necessário resolver a equação da condução térmica no corpo do cátodo. O comportamento assintótico das soluções para um cátodo finito no caso limite de altas correntes é encontrado e confirmado pelos resultados numéricos. É confirmado um padrão geral das características tensão-corrente de vários modos de transferência de corrente em cátodos finitos sugerido previamente com base numa análise de bifurcações. É estudada a transição de modos mancha num cátodo finito no limite de cátodos de grandes dimensões para o modo mancha solitária num cátodo plano infinito. É estabelecido que o modo mancha solitária representa uma forma limite do modo mancha de alta tensão num cátodo finito. É considerada a questão da distinção entre modo difuso e modo mancha num cátodo finito.

É desenvolvida uma abordagem para o cálculo de pontos de bifurcação nos quais soluções mancha tridimensionais bifurcam-se a partir de soluções que descrevem o

modo difuso e modos mancha axialmente simétricos. Em particular, é calculado o primeiro ponto de bifurcação posicionado na solução que descreve o modo difuso e, por conseguinte, o seu limite de estabilidade, isto é, a corrente abaixo da qual o modo difuso torna-se instável. São apresentados os resultados da modelação numérica efectuada para o caso de um cátodo de tungsténio de forma cilíndrica a operar num plasma de alta pressão. É estudado o efeito produzido no limite de estabilidade pelas variações dos parâmetros de controle (dimensões do cátodo, função de trabalho do material do cátodo, tipo e pressão do gás que produz o plasma). Foi encontrado que o comportamento do limite de estabilidade sujeito a estas variações está em conformidade com as tendências observadas experimentalmente. Foi encontrado que o limite de estabilidade é muito mais sensível às variações dos parâmetros de controle do que as características tensão-corrente do modo difuso, sendo o efeito mais forte produzido pelas variações das dimensões do cátodo e da função de trabalho do material do cátodo. Este resultado está em conformidade com o facto experimental de que a transição difuso-mancha é de difícil reprodução.

## **Palavras Chave**

Interacção Plasma-Cátodo

Arcos

Cátodos Termiónicos

Plasmas Térmicos

Plasmas de Alta Pressão

Modos de Transferência de Corrente

# Abstract

A detailed study is presented of various aspects of the interaction of a high-pressure arc plasma with refractory cathodes. A model of the near-cathode plasma layer in a plasma under a pressure of the order of one or several atmospheres is reconsidered on the basis of recent theoretical results. Physics of the near-cathode layer is analyzed in the range of near-cathode voltage drops of up to 50 V, in accord to recent experimental results which have shown that the near-cathode voltage drop in high-pressure arc discharges may be that high. Mechanisms are identified which cause non-monotony of the dependence of the energy flux density on the surface temperature at fixed values of the near-cathode voltage drop. A closed description of the plasma-cathode interaction is obtained by numerically solving the nonlinear boundary-value problem for the temperature distribution inside the cathode body. Results of numerical modelling of the diffuse discharge under conditions of a model arc lamp are given and a good agreement with the experimental data is shown.

Solitary spots on infinite planar cathodes and diffuse and axially symmetric spot modes on finite cathodes of high-pressure arc discharges are studied in a wide range of arc currents. General features are analyzed and extensive numerical results on planar and cylindrical tungsten cathodes of atmospheric-pressure argon arcs are given for currents of up to 100 kA. It is shown, in particular, that the temperature of cathode surface inside a solitary spot varies relatively weakly and may be estimated, to the accuracy of about 200 – 300 K, without actually solving the thermal-conduction equation in the cathode body. Asymptotic behavior of solutions for finite cathodes in the limiting case of high currents is found and confirmed by numerical results. A general pattern of current-voltage characteristics of various modes on finite cathodes suggested previously on the basis of bifurcation analysis is confirmed. A transition from the spot modes on a finite cathode in the limit of large cathode dimensions to the solitary-spot mode on an infinite planar cathode is studied. It is found that the solitary-spot mode represents a limiting form of the high-voltage spot mode on a finite cathode. A question of distinguishing between diffuse and spot modes on finite cathodes is considered.

An approach is developed to calculation of bifurcation points at which three-dimensional spot-mode solutions branch off from solutions describing the diffuse mode and axially symmetric spot modes. In particular, the first bifurcation point positioned on the diffuse-mode solution has been calculated, and thus its stability limit, i.e., the current below which the diffuse mode becomes unstable. Calculation results are given for the case of a tungsten cathode in the form of a circular cylinder in high-pressure plasmas. Effect produced on the stability limit by variations of control parameters



(cathode dimensions, work function of the cathode material, plasma-producing gas and its pressure) is studied and found to conform to trends observed experimentally. The stability limit is found to be much more sensitive to variations of control parameters than characteristics of the diffuse mode are, the strongest effect being produced by variations of cathode dimensions and of the work function of the cathode material. This finding conforms to the fact that the diffuse-spot transition is difficult to reproduce in the experiment.

### **Keywords**

Plasma-Cathode Interaction

Arcs

Thermionic Cathodes

Thermal Plasmas

High-Pressure Plasmas

Modes of Current Transfer

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Descargas de arco e suas aplicações tecnológicas . . . . .	1
1.2	Interacção plasma-cátodo em descargas de arco . . . . .	4
1.3	Descrição teórica da interacção plasma-cátodo em descargas de arco de alta pressão . . . . .	7
1.4	O modelo . . . . .	13
1.5	Qual é a razão da existência de múltiplas soluções para o problema da transferência de corrente para cátodos refractários? . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Características da camada de plasma junto ao cátodo e modo difuso a baixas correntes</b>	<b>22</b>
2.1	Introdução . . . . .	23
2.2	Modelo da camada de plasma junto ao cátodo . . . . .	23
2.2.1	Modificações introduzidas no modelo de Benilov e Marotta . . . . .	27
2.2.2	Resultados numéricos: fluxos de partículas provenientes do plasma para a superfície do cátodo . . . . .	31
2.2.3	Resultados numéricos: fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo . . . . .	36
2.3	Perdas de energia pela parte da superfície do cátodo que contacta com o gás frio . . . . .	42
2.4	Resolução da equação da condução térmica no cátodo . . . . .	45
2.5	Modelação do modo difuso num arco de baixa corrente . . . . .	47
2.6	Conclusões . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Modo difuso num grande intervalo de corrente e modos mancha axialmente simétricos</b>	<b>59</b>
3.1	Introdução . . . . .	59
3.2	Mancha solitária . . . . .	60
3.2.1	O modelo . . . . .	61
3.2.2	Aspectos gerais: limite superior da temperatura do cátodo e limite inferior da temperatura no interior de manchas solitárias de baixa tensão . . . . .	62
3.2.3	Resultados da modelação numérica . . . . .	66
3.3	Modos num cátodo finito . . . . .	70

3.3.1	Aspectos gerais: solução assintótica no caso limite de altas correntes . . . . .	70
3.3.2	Resultados da modelação numérica . . . . .	71
3.3.3	Definição dos modos difuso e mancha . . . . .	85
3.4	Conclusões . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Bifurcações de modos mancha tridimensionais a partir de soluções axialmente simétricas</b>	<b>90</b>
4.1	Introdução . . . . .	90
4.2	Cálculo dos pontos de bifurcação . . . . .	92
4.2.1	O método . . . . .	93
4.2.2	Resultados e discussão . . . . .	98
4.3	Considerações de estabilidade das soluções . . . . .	105
4.4	Limite de estabilidade do modo difuso . . . . .	107
4.5	Conclusões . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>114</b>
5.1	Resultados . . . . .	114
5.2	Implicações . . . . .	115
<b>A</b>	<b>Resolução numérica da equação da condução térmica no interior do cátodo</b>	<b>117</b>
A.1	Linearização do problema . . . . .	117
A.2	Equações em diferenças finitas . . . . .	119
A.3	Resolução das equações em diferenças finitas . . . . .	121
A.4	Aproximações iniciais . . . . .	123
A.4.1	Modo difuso . . . . .	123
A.4.2	Modo mancha axialmente simétrico . . . . .	124
A.4.3	Mancha solitária . . . . .	126

# Capítulo 1

## Introdução

*Neste capítulo é apresentada uma síntese da compreensão da interacção plasma-cátodo em descargas de arco anterior a esta dissertação. Particular ênfase é colocado no caso das descargas de arco de alta pressão. O modelo utilizado nesta dissertação para a descrição da interacção entre um plasma de descarga de arco de alta pressão e um cátodo refractário é estabelecido na forma de um problema não linear com condições de fronteira para a distribuição da temperatura no interior do corpo do cátodo. É discutida a existência de múltiplas soluções do problema com base na não monotonia da dependência da densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo em relação à temperatura da superfície do cátodo. É evidenciada a aplicação que o trabalho desenvolvido nesta dissertação pode ter na modelação das lâmpadas de descarga de alta intensidade.*

### 1.1 Descargas de arco e suas aplicações tecnológicas

As descargas de arco, também denominadas arcos eléctricos, apresentam uma coluna de plasma com brilho muito intenso ligada aos eléctrodos (ânodo e cátodo). Segundo Roth [1], este tipo de descarga eléctrica foi relatado pela primeira vez por Sir Humphrey Davy em 1808 no seguimento das suas experiências de electroquímica. No livro básico de Raizer [2] podemos encontrar uma caracterização das descargas de arco: são descargas eléctricas em gases ou em vapores resultantes da vaporização do cátodo; a queda de tensão junto ao cátodo é relativamente baixa (não excede 20 – 30 V para arcos curtos); a corrente pode variar entre 1 e  $10^5$  A; a característica tensão-corrente é em muitas situações do tipo decrescente. No artigo de revisão de Jüttner [3], podemos encontrar uma definição semelhante: "arcos eléctricos são descargas em gases e vapores com correntes superiores a 1 A e uma tensão de funcionamento relativamente pequena, em geral inferior a 100 V". O termo arco foi aplicado a estas descargas devido à forma ca-

racterística da coluna horizontal brilhante da descarga entre dois eléctrodos colocados na posição horizontal (ver, por exemplo, [2]).

As descargas de arco constituem um tema muito vasto. Uma discussão introdutória sobre descargas de arco pode ser encontrada na literatura (ver, por exemplo, os livros de Roth [1], Raizer [2] e Boulos *et al* [4]). Sem entrar na discussão dos diferentes tipos de arco, é possível distinguir duas grandes classes de descargas de arco: descarga em vácuo e descarga em gases. Quando a descarga de arco ocorre no vácuo (o chamado arco de vácuo), a corrente eléctrica é conduzida pelo plasma que é constituído por material ionizado do cátodo, resultante da vaporização do cátodo pelo próprio arco. Nas descargas em gases, a transferência de corrente entre os eléctrodos é assegurada através da ionização do gás ambiente.

As descargas de arco têm muitas aplicações industriais. Como exemplo, podemos referir que as descargas de arco têm aplicação em metalurgia (ver, por exemplo, o trabalho de revisão de Tsvetkov [5]), no tratamento de resíduos perigosos (ver, por exemplo, o trabalho de revisão de Paul [6]), em soldadura por arco (ver, por exemplo, o livro de Lancaster [7]) e em interruptores de alta potência (ver, por exemplo, o trabalho de Greenwood [8]). É de referir, em particular, a aplicação que as descargas de arco têm nas chamadas lâmpadas de descarga de alta intensidade (lâmpadas HID<sup>1</sup>). Devido ao facto da validação do modelo proposto nesta dissertação (para descrever a interacção plasma-cátodo) ser feita através da comparação entre os resultados da modelação numérica e os resultados experimentais obtidos com uma lâmpada HID, vamos dar ênfase a este tipo de dispositivo.

Nas lâmpadas HID a luz é produzida por um arco muito intenso, criado pela passagem de corrente eléctrica através de um gás a alta pressão, a qual pode atingir as centenas de atmosferas. Estas lâmpadas são denominadas de acordo com a substância responsável pelas características principais do espectro de radiação: lâmpadas de mercúrio de alta pressão (lâmpadas HPM ou «high-pressure mercury»), lâmpadas de sódio de alta pressão (lâmpadas HPS ou «high-pressure sodium») e lâmpadas de halogenetos metálicos (lâmpadas MH ou «metal-halide»). No que se segue, vamos discutir as características principais destas lâmpadas.

Nas lâmpadas HPM o meio de descarga é constituído por vapor de mercúrio de alta pressão e um gás raro (usualmente argon). O mercúrio, apesar de ser um material poluente, tem a vantagem de ter a maior pressão de vapor de entre os elementos adequados para a produção de radiação. O gás raro é usado para permitir o arranque da lâmpada. Nestas lâmpadas a pressão do mercúrio pode atingir pressões de cerca de 40 bar (ver o trabalho de Fischer [9]). O espectro das lâmpadas HPM contém algumas linhas separadas na região do ultra violeta (UV) e na região visível. Entre as linhas

---

<sup>1</sup>Em inglês, estas lâmpadas são designadas por «high intensity discharge (HID) lamps».

visíveis existe uma grande separação, o que origina um baixo índice de representação da cor ( $\text{CRI}^2$ ) para estas lâmpadas, tipicamente inferior a 50. Por outro lado, não há emissão de radiação na região do vermelho, o que constitui uma deficiência básica destas lâmpadas (as pessoas quando iluminadas com este tipo de luz apresentam um aspecto cadavérico). Esta deficiência é superada, em parte, pela deposição de fósforos na parede interna do vidro que transformam a radiação UV em radiação visível. Mesmo assim, a eficácia luminosa<sup>3</sup> destas lâmpadas não ultrapassa os 50 lm/W (ver, por exemplo o trabalho de Günther [11]). Apesar destas lâmpadas não serem muito eficientes, elas constituem um importante esquema de lâmpada devido à sua simplicidade e ao seu baixo custo e ao facto de serem a origem das lâmpadas HPS e das lâmpadas MH. De entre as aplicações das lâmpadas HPM, destaca-se a sua utilização na iluminação de paisagens e auto-estradas.

Nas lâmpadas HPS o meio de descarga é constituído por vapores de sódio e de mercúrio e um gás raro (usualmente xenon). Existem três razões para a presença de mercúrio (ver, por exemplo, o livro clássico de Waymouth [12] sobre lâmpadas de descarga). Em primeiro lugar, sem ele a tensão de funcionamento destas lâmpadas seria baixa (e por conseguinte a potência depositada nas lâmpadas seria baixa). Em segundo lugar, a adição de mercúrio enriquece o espectro de emissão destas lâmpadas. Em terceiro lugar, o sódio é mais facilmente manuseável sob a forma de amálgama. O espectro das lâmpadas HPS é constituído principalmente por duas linhas (589.0 nm e 589.6 nm) na região visível, as quais estão perto do máximo (550 nm) da curva de eficiência do olho humano. (Por isso, não é necessário utilizar fósforos nestas lâmpadas.) As lâmpadas HPS são bastante eficazes. A sua eficácia luminosa pode atingir os 150 lm/W para um CRI de 20 (ver o trabalho [11]). O CRI destas lâmpadas pode ser aumentado através do aumento da pressão do meio de descarga, o qual origina um alargamento das linhas acima referidas. No entanto, existe um compromisso entre cor e eficácia nestas lâmpadas; um aumento da pressão conduz a um aumento do CRI, mas também a uma diminuição da eficácia devido ao surgimento de linhas de emissão na região do infra vermelho. A existência deste compromisso pode ser vista também nas lâmpadas de sódio de baixa pressão (lâmpadas LPS ou «low-pressure sodium»). As

---

<sup>2</sup>Iniciais de «Color Rendering Index». O índice de representação da cor é uma medida de quão eficientemente a luz de uma lâmpada reproduz as cores que um objecto apresenta quando iluminado com uma luz de referência, tal como a luz do dia. Para se alcançar uma reprodução perfeita da cor de uma superfície, é necessário que todos os comprimentos de onda reflectidos pela superfície estejam contidos na radiação da fonte luminosa. Por definição, a distribuição de radiação de corpo negro é considerada perfeita e é-lhe atribuída um CRI de valor 100.

<sup>3</sup>A eficácia luminosa é uma medida de quão eficientemente uma lâmpada converte a energia eléctrica em luz visível e é medida em lumen por watt (lm/W). A eficácia é definida em termos da resposta média do olho humano ao espectro visível, a qual depende do nível de iluminação (ver, por exemplo, o trabalho de Rea [10]).

lâmpadas LPS têm uma emissão quase monocromática, o que leva a que a sua eficácia possa ultrapassar os 200 lm/W, mas com uma reprodução da cor muito pobre (ver o trabalho de Lister [13]). De entre as aplicações das lâmpadas HPS, destaca-se a sua utilização na iluminação de grandes avenidas, estradas, túneis, pontes, monumentos e terminais de transporte, onde a reprodução da cor não é um factor crucial.

As lâmpadas MH são fundamentalmente lâmpadas de mercúrio às quais são adicionados halogenetos metálicos. A pressão do mercúrio nestas lâmpadas varia entre apenas alguns bar e os 50 bar (ver o trabalho de Erk [14]). Como exemplo, uma lâmpada<sup>4</sup> MH de 70 W contendo argon (120 torr a 293 K), 15.5 mg de mercúrio e 2.1 mg do aditivo Na-Sc-Tl-I (importante sistema utilizado na tecnologia das lâmpadas MH) atinge uma pressão de funcionamento de cerca de 19 atm (ver o trabalho de Fromm *et al* [15]). Devido aos vários metais que podem ser usados nas lâmpadas MH, os espectros destas lâmpadas podem apresentar várias linhas distribuídas por toda a região visível. Este facto determina uma emissão de luz quase-contínua, atingindo-se valores de CRI superiores a 90 e eficácias luminosas superiores a 90 lm/W (ver o trabalho [11]). As lâmpadas MH são as fontes de luz mais eficientes (grande eficácia luminosa e grande CRI) usadas actualmente. De entre as aplicações das lâmpadas MH, destaca-se a sua utilização na iluminação de espaços comerciais, estradas, edifícios, recintos desportivos e em faróis de automóveis. De uma forma geral, estas lâmpadas são utilizadas nas situações que exigem uma boa reprodução da cor.

Recentemente foi desenvolvido um novo conceito de lâmpada HID, a denominada lâmpada UHP<sup>5</sup> (ver os trabalhos de Fischer [16] e de Derra *et al* [17]). Trata-se de lâmpadas de mercúrio muito compactas (a distância entre os eléctrodos é da ordem de 1 mm) e com uma luminosidade muito intensa, que operam a uma pressão de cerca de 200 atm e tiram partido da existência da molécula Hg<sub>2</sub> a esta pressão. Uma característica importante destas lâmpadas é a de terem uma forte emissão contínua na região visível. Estas lâmpadas apresentam uma excelente reprodução da cor e a sua eficácia luminosa situa-se entre os 65 lm/W e os 70 lm/W. As lâmpadas UHP constituem uma peça crucial nos modernos sistemas de projecção e, em especial, nos modernos projectores portáteis como, por exemplo, o projector In Focus LP130 fabricado pela In Focus.

## 1.2 Interacção plasma-cátodo em descargas de arco

Num arco eléctrico é possível distinguir três regiões: coluna de arco, região anódica e região catódica. Numa descarga de arco de alta pressão, o plasma que constitui a

<sup>4</sup>Lâmpada da OSRAM - HQI TS70W/WDL PLUS.

<sup>5</sup>Em inglês, estas lâmpadas são designadas por «ultra high performance (UHP) lamps».

coluna de arco encontra-se em equilíbrio termodinâmico local desde que a corrente seja suficientemente elevada<sup>6</sup>. Presentemente, a compreensão de tal plasma encontra-se relativamente bem estabelecida. A compreensão dos fenómenos que têm lugar na região catódica é mais difícil do que no caso da coluna de arco devido ao plasma nesta região ser de não equilíbrio e devido aos processos que ocorrem no interior e na superfície do cátodo (forte aquecimento, devido principalmente ao bombardeamento iónico, e forte emissão termiónica). Os processos que ocorrem na região anódica são relativamente simples uma vez que o ânodo actua como colector de electrões.

Um desenho adequado dos eléctrodos é de importância crucial para os dispositivos de arco. Em tais dispositivos como, por exemplo, as lâmpadas HID, esta exigência aplica-se primordialmente aos cátodos, pois, crê-se que os efeitos provocados pelo ânodo são menos críticos para a performance destas lâmpadas (ver, por exemplo, o trabalho de Waymouth [21]). Relativamente à importância dos efeitos provocados por uma má organização da transferência de corrente para o cátodo, é de referir, por exemplo, que o funcionamento das lâmpadas HID pode ser fortemente afectado pela erosão do cátodo e pela deposição de átomos do material do cátodo na parte interna das paredes de vidro (fenómeno conhecido por «blackening»).

O desenho dos eléctrodos de dispositivos de arco pode ser facilitado por uma boa compreensão da física dos fenómenos que ocorrem junto aos eléctrodos e pelo desenvolvimento de um modelo de cálculo. Presentemente, um modelo numérico da coluna de arco pode ser desenvolvido com base em códigos numéricos de dinâmica de fluidos tais como, por exemplo, o pacote comercial FLUENT. É uma questão de rotina, para muitos grupos de investigação espalhados por vários países, a modelação da coluna de arco com base em tais códigos. Contudo, resultados físicos razoáveis para a totalidade do sistema arco-eléctrodos não podem ser obtidos sem a modelação das regiões catódica e anódica, as quais fornecem condições de fronteira<sup>7</sup> para a modelação da coluna de arco; o que significa que um adequado modelo de cálculo dos fenómenos que ocorrem junto aos eléctrodos é um constituinte muito importante de qualquer modelo que pretenda descrever um dispositivo de arco no seu todo.

A descrição da interacção plasma-cátodo numa descarga de arco constitui um dos

---

<sup>6</sup> Como exemplo, podemos referir que o plasma da coluna de arco encontra-se em equilíbrio termodinâmico para correntes superiores a aproximadamente 25 A num plasma de argon à pressão atmosférica (ver o trabalho de Benilov [18]) e aproximadamente 50 mA num plasma de ar à pressão atmosférica (ver o trabalho de Benilov e Naidis [19]). Uma questão interessante é o que acontece no regime de baixas correntes, situado entre os regimes da descarga de arco típica e da descarga luminescente. Aos efeitos cinéticos complexos presentes na descarga luminescente (ver, por exemplo, o livro de Capitelli *et al* [20] relativo aos processos cinéticos em gases atmosféricos) acrescenta-se, neste regime intermédio, o efeito da temperatura elevada da descarga de arco.

<sup>7</sup> Estas condições de fronteira estão associadas às distribuições da temperatura e da densidade de corrente eléctrica na superfície dos eléctrodos.



mais fascinantes desafios teóricos colocados à física das descargas em gases. Segundo Raizer [2], muito poucos fenómenos na física das descargas em gases têm gerado um número de hipóteses, modelos e esquemas teóricos comparável ao número dos dedicados à interacção arco-cátodo.

Quando a descarga de arco ocorre no vácuo, ela apresenta-se normalmente restrita a pequenas zonas da superfície do cátodo, constituindo as chamadas manchas catódicas. Estas manchas movem-se aleatoriamente sobre a superfície do cátodo. É a totalidade destas manchas que produz o arco eléctrico. Segundo o artigo de revisão de Beilis [22], estas manchas podem ser de dois tipos consoante a sua velocidade, tempo de vida e corrente. Um destes tipos, é constituído por manchas com velocidade compreendida entre  $10$  e  $100 \text{ m s}^{-1}$ , tempo de vida menor que  $10 \mu\text{s}$  e corrente menor que  $10 \text{ A}$ ; o outro tipo é constituído por manchas com velocidade de cerca de  $0.1 \text{ m s}^{-1}$ , tempo de vida de cerca de  $100 \mu\text{s}$  e corrente de cerca de  $10 \text{ A}$ . Por vezes, as manchas podem surgir juntas na superfície do cátodo formando pequenos grupos. Para o caso de um cátodo de cobre a funcionar com correntes de arco inferiores a  $1000 \text{ A}$ , a corrente associada a estes grupos de manchas varia entre  $100$  e  $200 \text{ A}$ .

No caso das descargas em gases e cátodos refractários<sup>8</sup>, embora a temperatura atingida pela superfície do cátodo seja elevada, a vaporização do material do cátodo é desprezável. Neste caso, a transferência de corrente é normalmente estacionária. Os cátodos refractários são frequentemente denominados cátodos termiónicos, mesmo que o sentido desta terminologia não esteja bem estabelecido.

Dependendo do valor da corrente, é possível a ocorrência de dois modos de transferência de corrente para cátodos refractários: o cátodo pode operar no denominado modo difuso, onde a corrente se encontra distribuída de uma maneira mais ou menos uniforme sobre a superfície frontal do cátodo ou no modo mancha, onde quase toda a corrente se encontra localizada em manchas que ocupam apenas uma pequena fracção da superfície do cátodo. Estes modos de transferência de corrente são conhecidos desde há muito tempo, nomeadamente desde meados do século passado a partir do trabalho de Thouret *et al* [23]. Recentemente, o grupo de Mentel realizou uma investigação permonorizada acerca destes modos (ver, por exemplo, [24]).

Segundo o livro de revisão de Neumann [25], o modo difuso requer correntes acima de um determinado valor crítico. Ainda segundo [25], o modo difuso é favorecido pela redução da superfície frontal do cátodo (cátodos finos), pelo aumento da resistência térmica do cátodo (cátodos longos) e por um menor valor da função de trabalho do material do cátodo; variando a corrente, a transição entre os modos mancha e difuso exhibe histerese. A densidade de corrente é cerca de  $10^8 \text{ A m}^{-2}$  para o modo

---

<sup>8</sup> Cátodos para os quais, nas condições do seu funcionamento, não é significativa a vaporização do material de que são feitos; por exemplo, cátodos de tungsténio.

mancha e cerca de  $10^6 \text{ A m}^{-2}$  para o modo difuso. Estas tendências, com exceção do efeito produzido pelo valor da função de trabalho (o qual não foi estudado), foram confirmadas pelo trabalho do grupo de Mentel [24], para além das seguintes: uma diminuição da pressão do gás favorece o modo difuso; variando a pressão, a transição entre os modos mancha e difuso exhibe histerese; o modo mancha apresenta uma queda de tensão catódica um pouco inferior à do modo difuso.

### 1.3 Descrição teórica da interacção plasma-cátodo em descargas de arco de alta pressão

Os avanços alcançados recentemente na teoria da transferência de corrente para cátodos refractários em descargas de arco de alta pressão (ver, por exemplo, o artigo de revisão de Jüttner [3]) foram conseguidos no âmbito duma abordagem teórica baseada na resolução da equação da condução térmica no corpo do cátodo com uma condição de fronteira não linear que especifica a densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo como uma função do valor local da temperatura da superfície do cátodo e da queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo. Esta função é calculada a partir do tratamento de diferentes processos físicos que ocorrem na referida camada.

Esta abordagem foi aparentemente sugerida pela primeira vez por Bade e Yos [26]. Para além da formulação matemática apresentada neste trabalho, foi avançada, em particular, a hipótese de que no caso geral devem existir duas ou mais soluções para qualquer conjunto de condições de entrada, estando estas soluções relacionadas com diferentes modos de funcionamento do cátodo. Foi considerado ainda um cátodo semi-infinito, para o qual foi desenvolvido um modelo baseado na divisão da superfície do cátodo em duas regiões: uma região de mancha catódica com um determinado raio, na qual está localizada a corrente (e o calor), rodeada por uma região periférica livre de corrente; foram apresentadas importantes considerações relativamente a este modelo. Foram obtidas soluções unidimensionais que descrevem o modo difuso de funcionamento de cátodos com forma cilíndrica. Apesar da ocorrência de um certo número de discrepâncias quantitativas, estas soluções descrevem correctamente as tendências gerais de variação da temperatura do cátodo e do calor transferido (para o sistema de arrefecimento do cátodo) em função da geometria do cátodo e da corrente. Resumindo e concluindo, podemos dizer que a importância do trabalho de Bade e Yos [26] consistiu em sugerir uma descrição autocoerente do acoplamento entre os fenómenos que ocorrem no plasma e os fenómenos que ocorrem no cátodo.

A abordagem teórica de Bade e Yos [26] é conhecida acerca de 40 anos. Infeliz-

mente, a importância desta abordagem e o facto dela ser a única capaz de descrever de uma forma autoconsistente o acoplamento entre o plasma e o cátodo não foram percebidos pelos investigadores que se lhes seguiram. Por conseguinte, a abordagem de Bade e Yos [26] ficou quase esquecida. Um factor que contribuiu para o seu esquecimento terá sido o facto dela nunca ter sido publicada numa revista científica mas sim apenas sob a forma de um relatório interno. Por conseguinte, surgiram muitos modelos teóricos e inúmeras equações. Para além destes modelos serem contraditórios entre si, contêm parâmetros semi-empíricos e suposições arbitrárias para eliminar dificuldades. Resumindo e concluindo, podemos dizer que os avanços na descrição teórica da interacção plasma-cátodo como um todo foram limitados durante muitos anos (ver, por exemplos, os trabalhos de revisão de Neumann [25], de Beilis [27, 22] e de Hantzsche [28]). Como exemplo, podemos mencionar algumas questões que continuaram em aberto: Quantos modos existem em determinadas condições particulares? Quais os mecanismos que governam cada modo? Como é que cada modo pode ser calculado de uma forma autoconsistente?

A abordagem de Bade e Yos [26] foi redescoberta, com algumas ou outras variações, mais do que uma vez. Os primeiros a fazê-lo foram Moizhes e Nemchinsky [29, 30]: apesar de não conseguirem descrever distintamente o acoplamento entre os fenómenos que ocorrem no plasma e os fenómenos que ocorrem no cátodo, podemos ver que a abordagem seguida é semelhante à de Bade e Yos [26]. No trabalho [29], foi descrita uma estrutura (axialmente simétrica) do tipo mancha solitária num cátodo semi-infinito. Esta descrição foi efectuada com base na resolução numérica de uma equação integral para a distribuição da temperatura na superfície do cátodo sem ser necessário dividir a superfície do cátodo numa região onde está situada a mancha colectora de corrente e uma região periférica livre de corrente. As distribuições de todos os parâmetros ao longo da superfície do cátodo foram determinadas sem quaisquer considerações adicionais tais como o princípio da tensão mínima<sup>9</sup>, mostrando, assim, ser possível descrever uma estrutura de mancha com uma transição contínua entre a parte da mancha colectora de corrente e a periferia livre de corrente. Por conseguinte, foi provado que a abordagem teórica baseada na resolução do problema não linear da condução térmica é capaz de descrever uma estrutura de mancha sem ser necessário dividir a superfície do cátodo numa mancha colectora de corrente e numa periferia livre de corrente. Contudo, continuou por esclarecer como é que um modelo, baseado no conceito de uma mancha colectora de corrente rodeada por uma região livre de

---

<sup>9</sup>Também conhecido por princípio de mínimo de Steenbeck. Quando aplicado ao cálculo da coluna de arco, este princípio afirma que o estado estável do arco eléctrico está associado a uma queda de tensão mínima ao longo do arco (ver, por exemplo, o livro de Raizer [2]). Na situação onde é considerada uma corrente dada para o arco, a implementação deste princípio traduz-se em minimizar a queda de tensão na região catódica.

corrente, pode ser derivado de uma forma autoconsistente. Como exemplo, é de referir que o próprio Nemchinsky [31] para descrever uma mancha catódica numa descarga de vácuo, escusou-se de usar a abordagem utilizada no seu trabalho anterior [29]. Em vez disso, tendo admitido ser muito difícil resolver as equações que determinam a mancha catódica, substituiu a verdadeira distribuição radial de todos os parâmetros por um modelo de uma mancha com uma temperatura constante. O raio da mancha aparece como uma quantidade desconhecida por haver mais uma incógnita do que equações. Para fechar o problema foi usado o princípio da tensão mínima. De facto, todos os modelos teóricos de uma mancha solitária num cátodo semi-infinito, publicados até recentemente, são incompletos (um parâmetro, usualmente o raio da mancha, permanece indeterminado) e socorrem-se de parâmetros empíricos ou utilizam suposições teóricas, tais como algumas implementações do princípio da tensão mínima.

No modelo de Bade e Yos [26] a queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo foi assumida como sendo constante ao longo da superfície do cátodo e foi considerada como um parâmetro de controle do problema. No trabalho de Moizhes e Nemchinsky [29], a queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo foi considerada como sendo variável ao longo da superfície do cátodo e foi determinada a partir da equação da continuidade da corrente na zona de expansão. Assim, o parâmetro de controle no modelo de Moizhes e Nemchinsky [29] foi a diferença de potencial entre a superfície do cátodo e a base da coluna de arco. A queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo, determinada desta maneira, depende da distribuição da condutividade eléctrica da camada de plasma junto ao cátodo ao longo da superfície do cátodo. Em termos matemáticos, isto significa que no modelo de Moizhes e Nemchinsky [29] a dependência da densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo em relação à temperatura da superfície é não local, isto é, a densidade de fluxo de energia é governada não apenas pela temperatura do ponto da superfície considerado mas também pelas temperaturas dos outros pontos.

Uma abordagem semelhante à de Moizhes e Nemchinsky [29] foi utilizada no trabalho de Moizhes e Nemchinsky [30], no qual foi resolvido numericamente um problema não linear, axialmente simétrico, da condução térmica num cátodo finito (cilíndrico). Foi obtida uma única solução para o caso de cátodos com uma geometria idêntica à das condições experimentais e duas soluções para o caso de um cátodo com um diâmetro igual à sua altura. A obtenção destas duas soluções pode ser considerada como um argumento a favor da hipótese avançada por Bade e Yos [26] de que o problema não linear da condução térmica tem múltiplas soluções que descrevem diferentes modos de transferência de corrente para o cátodo. Por outro lado, permanece obscuro, por exemplo, a razão pela qual cada uma das duas soluções simultâneas encontradas no trabalho de Moizhes e Nemchinsky [30] termina em vez de voltar para trás ou se juntar

à outra, o que não é um comportamento típico de múltiplas soluções. Outros pontos interessantes que permanecem por esclarecer têm a ver com o padrão geral de todas as soluções existentes e quão importante é, para a existência de múltiplas soluções, a dependência não local da densidade de fluxo de energia em relação à temperatura da superfície, desprezada no trabalho de Bade e Yos [26] e tomada em atenção nos trabalhos de Moizhes e Nemchinsky [29, 30].

Uma outra redescoberta da abordagem de Bade e Yos [26] foi feita nos anos de 1990 por Benilov [32, 33, 34, 35]. Nos trabalhos [32, 33, 34], foi encontrada uma maneira autoconsistente de derivar um modelo fechado<sup>10</sup> para uma mancha colectora de corrente rodeada por uma periferia livre de corrente. Neste modelo foi obtida uma relação que governa o raio da mancha e que representa uma condição de solvabilidade do problema que descreve a distribuição da temperatura numa zona de transição que separa a mancha da região livre de corrente. Este resultado pode ser melhor entendido em termos da teoria das estruturas dissipativas não lineares. Do ponto de vista desta teoria, o problema do contacto entre uma mancha colectora de corrente e uma região livre de corrente é um problema de coexistência de fases. Geralmente, a coexistência é possível apenas se uma determinada condição é satisfeita (construção de Maxwell; ver, por exemplo, o livro de Haken [36]). Esta condição resulta do tratamento de uma região intermédia (transição) que separa as fases. Nestes termos, a acima mencionada condição de solvabilidade representa a construção de Maxwell para o modelo considerado. Por conseguinte, é um exemplo interessante de um problema multidimensional no qual a construção de Maxwell pode ser formulada explicitamente.

Um problema de condução térmica com uma condição de fronteira não linear e local governando a distribuição da temperatura num cátodo finito foi tratado por Benilov [35], com base na teoria de bifurcações. Foi provado que, sob certas condições, este problema tem múltiplas soluções multidimensionais para a mesma corrente de arco, uma delas descrevendo o modo difuso e as outras descrevendo vários modos mancha. Por conseguinte, a hipótese de Bade e Yos [26], acima mencionada, foi confirmada. Podemos concluir que a existência de múltiplos modos de transferência de corrente em cátodos de arco não é necessariamente uma manifestação de mecanismos físicos essencialmente diferentes tal como foi sugerido por alguns autores: como exemplo, podemos referir que nos trabalhos de Waymouth [21] e de Fischer [9] é admitido que o modo difuso é governado essencialmente pela emissão termiônica reforçada pelo efeito de Schottky e o modo mancha governado essencialmente pela emissão de campo ou pela emissão<sup>11</sup> sob a acção conjunta da temperatura e do campo eléctrico; no trabalho

<sup>10</sup>Por modelo fechado pretende-se significar um modelo que permite calcular os parâmetros da mancha sem ser necessário usar parâmetros empíricos, tais como o raio da mancha, ou suposições arbitrárias, tais como o princípio da tensão mínima.

<sup>11</sup>Em inglês, este tipo de emissão denomina-se «thermo-field emission»; se uma alta temperatura

[9] é ainda admitido que no modo difuso existe uma contribuição considerável da corrente devida aos iões e no modo mancha existe uma predominância da corrente devida aos electrões emitidos. Em vez disso, a existência de múltiplos modos pode ser descrita como uma manifestação da não unicidade do balanço térmico de um corpo finito aquecido por um fluxo de energia externo que tem uma dependência não linear relativamente à temperatura local da superfície.

Em termos da teoria das estruturas dissipativas não lineares, é de realçar que o padrão geral das características tensão-corrente para diferentes modos encontrado por Benilov [35] representa um exemplo interessante do diagrama de bifurcações de um sistema biestável.

Depois dos trabalhos de Benilov [32, 33, 34, 35], a abordagem de Bade e Yos [26] passou a ser utilizada por vários autores (em simultâneo com o desenvolvimento do trabalho apresentado nesta dissertação). A este respeito, é de referir os trabalhos de Böttcher e Böttcher [37, 38, 39], de Böttcher *et al* [40], de Coulombe [41], de Krücken [42] e de Graser [43]. É de realçar que apesar da abordagem de Bade e Yos [26] ter sido aceite e amplamente utilizada nos últimos anos, continua a haver autores que insistem em utilizar modelos que contêm suposições arbitrárias, tais como o princípio da tensão mínima, para eliminar dificuldades; ver os trabalhos recentes de Schmitz e Riemann [44] e de Nemchinsky [45].

No que diz respeito à interacção plasma-cátodo em arcos de vácuo (ver por exemplo, [3] e as referências contidas neste artigo), os modelos melhor desenvolvidos presentemente são os que consideram esta interacção como um fenómeno colectivo. (Noutros modelos, esta interacção é tratada como uma sequência de eventos individuais denominados microexplosões, micromanchas ou fragmentos; ver, por exemplo o trabalho de Mesyats [46], onde as manchas catódicas em descargas de vácuo são descritas em termos do conceito «ecton<sup>12</sup>».) Estes modelos não são fundamentalmente diferentes dos modelos teóricos da interacção plasma-cátodo em arcos de alta pressão. Por conseguinte, a abordagem teórica baseada na resolução do problema não linear da condução térmica no corpo do cátodo pode ser aplicada à descrição da interacção plasma-cátodo também no caso das descargas de arco em vácuo, sendo a sua aplicabilidade limitada apenas pela suposição de um fenómeno colectivo.

No recente artigo de revisão de Beilis [22], sobre a teoria de arcos de vácuo, foi considerado um modelo fechado, baseado na suposição de fenómeno colectivo, para uma mancha rodeada por uma região livre de corrente, o qual foi obtido a partir da análise dos processos que têm lugar no plasma (numa camada cinética) em oposição

---

e um campo eléctrico intenso estão presentes simultaneamente, a densidade de corrente de emissão é superior à soma das densidades de corrente de emissão termiônica e de campo.

<sup>12</sup>Nome criado por Mesyats para designar «electron emission centres».

aos trabalhos anteriores, em particular em oposição aos trabalhos de Ecker [47] e Nemchinsky [31], onde o princípio da tensão mínima foi utilizado. É de realçar que, tal como foi apontado por Benilov [34], a dificuldade nos modelos antigos de uma mancha colectora de corrente rodeada por uma região livre de corrente reside na perda de informação que ocorre quando a condição da continuidade do fluxo de calor, a qual é verificada em qualquer ponto da superfície do cátodo, é substituída por apenas uma condição, nomeadamente pela equação do balanço integral do calor. É óbvio que esta dificuldade não pode ser utrapassada de um modo satisfatório pela invocação de condições teóricas que não estejam relacionadas com a condução térmica no cátodo. Tendo dito isto, devemos concluir que as considerações citadas no trabalho de Beilis [22] não são melhor justificadas que o princípio da tensão mínima.

Embora esta secção seja dedicada à descrição teórica da interacção plasma-cátodo em descargas de arco de alta pressão, convém fazer um resumo do ponto da situação relativamente aos estudos experimentais. Desde sempre a camada de plasma junto ao cátodo em descargas de arco de alta pressão representou um objecto de difícil acesso à experimentação devido às pequenas dimensões envolvidas e à existência de altos gradientes de grandezas físicas. De facto, durante muitos anos não se soube sequer o valor da queda de tensão junto ao cátodo. A situação só começou a mudar em 1998 quando foram publicados os primeiros resultados experimentais do grupo de Mentel na Universidade de Bochum (ver o trabalho de Luhmann *et al* [48]). Estes dados mostraram que a queda de tensão junto ao cátodo poderia ser muito maior do que os valores que a maioria dos investigadores julgava ser possível, confirmando, assim, os resultados teóricos de Benilov e Marotta [49] (os quais mostravam que a queda de tensão poderia atingir valores tão elevados como 27 V, valor considerado demasiado elevado pela generalidade dos investigadores).

Vamos resumir o ponto da situação referente à modelação da interacção plasma-cátodo no início do ano de 1999, altura em que teve início o trabalho apresentado nesta dissertação. Naquela altura tinha sido provado por Benilov [34] que era possível descrever, de uma forma autoconsistente, diferentes modos (modo difuso e diferentes modos mancha) de transferência de corrente de um plasma de arco de alta pressão para um cátodo refractário com base na resolução da equação de condução do calor no interior do corpo do cátodo, suplementada com uma condição de fronteira não linear que descreve a dependência da densidade de fluxo de energia (proveniente do plasma para a superfície do cátodo) em relação à temperatura da superfície do cátodo. No entanto, esta abordagem ainda estava por realizar. A realização desta abordagem implicava o uso de métodos eficazes de cálculo de múltiplas soluções da equação de condução do calor em pelo menos duas dimensões.

A tarefa desta dissertação foi escolhida de modo a realizar a abordagem acima

referida para o caso de diferentes modos estacionários bidimensionais (axialmente simétricos) de transferência de corrente. De entre as actividades desenvolvidas, destacamos as seguintes: construção de uma abordagem numérica eficaz; cálculo e estudo das propriedades fundamentais dos diferentes modos de transferência de corrente; validação do modelo através da comparação dos resultados numéricos com dados experimentais.

Um impulso adicional para a realização do trabalho apresentado nesta dissertação foi o facto de, na altura do seu início, o grupo de Mentel ter começado recentemente dois projectos, «Fundamental characterization of thermionic cathodes» e «Fundamental characterization of electrodes for high pressure discharge lamps with time-variant energy input», financiados pelo Ministério da Educação e Investigação alemão, dos quais tinham acabado de surgir os primeiros dados experimentais fiáveis de grandezas eléctricas e térmicas resultante das investigações com uma lâmpada HID. O trabalho desta dissertação foi planeado como complemento teórico relativamente a estes trabalhos experimentais.

## 1.4 O modelo

O modelo utilizado nesta dissertação para descrever a interacção entre um plasma de arco de alta pressão e um cátodo refractário é semelhante ao que foi introduzido por Bade e Yos [26], excepto no que diz respeito à solução do problema referente à parte do plasma. Vamos considerar um cátodo refractário a operar numa descarga de arco de corrente contínua a alta pressão (ver figura 1.1). Uma parte da superfície do cátodo está em contacto com o plasma de arco (parte 1 indicada na figura 1.1). Esta parte da superfície colecta a corrente proveniente do plasma e é aquecida. Uma outra parte da superfície do cátodo (parte 2 indicada na figura 1.1) está em contacto com o gás frio, podendo trocar calor com o gás e ou dissipar energia sob a forma de radiação. A restante parte da superfície do cátodo (parte 3 indicada na figura 1.1) é mantida a uma temperatura constante  $T_c$  por meio de arrefecimento externo. (É importante realçar que a separação da superfície do cátodo numa parte que está em contacto com o plasma de arco e noutra que está em contacto com o gás frio é introduzida apenas por uma questão de clareza de apresentação do modelo. Na resolução do problema, esta separação não foi utilizada.) Assume-se que o cátodo constitui um meio isotrópico para a transferência de calor por condução. Então a condutividade térmica  $\kappa$  do material do cátodo não depende da direcção espacial e representa uma função da temperatura  $T$ :  $\kappa = \kappa(T)$ . A geração de calor de Joule no interior do cátodo é desprezada<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>No caso de um cátodo de tungsténio, este efeito só é significativo para correntes da ordem das centenas de ampéres (ver, por exemplo, o trabalho de Nemchinsky [50]). Como a validação do modelo



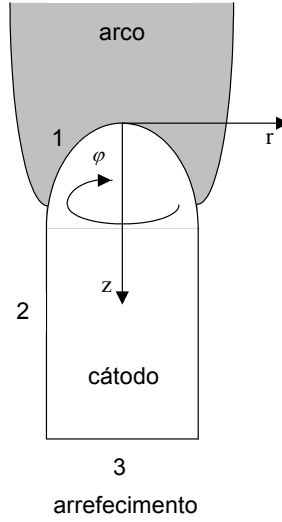


Figura 1.1: Esquema do modelo. 1: parte da superfície do cátodo colectora de corrente. 2: parte da superfície do cátodo que está em contacto com o gás frio. 3: parte da superfície do cátodo que é arrefecida por um fluido exterior ao cátodo.

O fluxo de energia proveniente do plasma de arco para a parte da superfície do cátodo colectora de corrente é gerado numa camada de plasma junto à superfície do cátodo. Como será provado posteriormente, esta camada é fina. Por conseguinte a transferência de corrente através desta camada é localmente unidimensional e é governada pelo valor local da temperatura da superfície do cátodo  $T_w$  e pela queda de tensão ao longo da camada  $U$ . Em tal situação, todos os parâmetros da camada de plasma junto ao cátodo (em particular, as densidades de fluxo de energia e de corrente eléctrica provenientes do plasma para a superfície do cátodo) podem ser considerados como funções de  $T_w$  e  $U$ . Assume-se que a queda de tensão ao longo da camada de plasma junto ao cátodo,  $U$ , é a mesma em todos os pontos da parte da superfície do cátodo colectora de corrente<sup>14</sup>. A troca de calor entre o cátodo e o gás frio e ou as

desta dissertação será feita no regime de baixas correntes, optou-se por não incluir este efeito no modelo.

<sup>14</sup>Esta assunção é válida se a queda de tensão na zona de expansão (região do plasma fora da camada junto ao cátodo na qual a densidade de corrente é reduzida desde os valores típicos para a mancha até os valores típicos para a coluna de arco) é muito menor que a queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo. Uma estimativa razoável da queda de tensão na zona de expansão pode ser encontrada no trabalho de Benilov e Marotta [49]: assumindo uma expansão de corrente semi-esférica, a correspondente queda de tensão é igual a  $I/2\pi\sigma r_*$ , onde  $I$  é a corrente,  $\sigma$  é a condutividade eléctrica do plasma e  $r_*$  o raio da mancha catódica. Tendo em atenção que num plasma de argon à pressão atmosférica  $r_*$  é da ordem de  $100\ \mu\text{m}$  (de acordo com os cálculos numéricos desta dissertação) e assumindo que na margem da camada junto ao cátodo (onde a temperatura é cerca de  $15 - 20 \times 10^3\ \text{K}$ )  $\sigma$  é da ordem de  $10^4\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  [51], vemos que, por exemplo, para uma corrente de  $5\ \text{A}$  a queda de tensão na zona de expansão é inferior a 10% da queda de tensão na camada junto ao cátodo (que é

perdas de energia por radiação na parte da superfície que contacta com o gás frio são assumidas como sendo governadas pelo valor local da temperatura da superfície do cátodo  $T_w$ .

Nas condições acima referidas, pode-se introduzir uma função  $q = q(T_w, U)$  que é definida para todos os valores da temperatura acima da temperatura de arrefecimento  $T_w \geq T_c$  e descreve a densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo que está em contacto com o plasma de arco e com o gás frio (isto é, para as partes 1 e 2 da superfície do cátodo indicadas na figura 1.1). Para altos valores de  $T_w$ , os quais correspondem à parte da superfície que está em contacto com o plasma de arco, esta função descreve o aquecimento da parte da superfície colectora de corrente pelo plasma. Para baixos valores de  $T_w$ , os quais correspondem à parte da superfície que está em contacto com o gás frio, esta função torna-se independente de  $U$  e descreve a troca de calor entre o cátodo e o gás frio e ou as perdas de energia por radiação. De um modo semelhante, pode-se introduzir uma função  $j = j(T_w, U)$  que é definida para todos os valores da temperatura acima da temperatura de arrefecimento  $T_w \geq T_c$  e descreve a densidade de corrente eléctrica proveniente do plasma para a superfície do cátodo. Para altos valores de  $T_w$ , esta função descreve a transferência de corrente do arco para a parte da superfície colectora de corrente através da camada de plasma junto ao cátodo. Para baixos valores de  $T_w$ , a função  $j(T_w, U)$  é igual a zero.

Se a função  $q(T_w, U)$  é conhecida, a distribuição da temperatura no interior e na superfície do cátodo pode ser calculada através da resolução da equação da condução térmica no corpo do cátodo,

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0, \quad (1.1)$$

com a condição de fronteira

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial n} = q(T_w, U) \quad (1.2)$$

na parte da superfície do cátodo que está em contacto com o plasma de arco e com o gás frio ( $n$  é uma direcção localmente ortogonal à superfície do cátodo e orientada para o exterior do cátodo) e com a condição de fronteira

$$T = T_c \quad (1.3)$$

na parte da superfície do cátodo que é mantida a temperatura constante por meio de arrefecimento externo.

Uma vez resolvido o problema (1.1)-(1.3), ficamos a conhecer a distribuição da temperatura ao longo da superfície do cátodo. Assim, usando a conhecida dependência  $j = j(T_w, U)$ , podemos calcular a distribuição da densidade de corrente ao longo da

---

da ordem de 10 V).

superfície do cátodo. Integrando  $j(T_w, U)$  ao longo da superfície do cátodo, podemos determinar a corrente de arco total,  $I$ , correspondente ao valor de  $U$  considerado,

$$I = \int_S j(T_w, U) dS. \quad (1.4)$$

Na equação (1.4),  $S$  é a superfície do cátodo que está em contacto com o plasma de arco e com o gás frio, isto é, as partes 1 e 2 da superfície do cátodo indicadas na figura 1.1.

Devemos realçar que a queda de tensão junto ao cátodo  $U$  no problema (1.1)-(1.3) é considerada como um parâmetro de controle. Este parâmetro deve ser escolhido de tal maneira que a corrente colectada pela superfície do cátodo (a corrente de arco), calculada pela equação (1.4), tenha o valor previamente estabelecido.

É de realçar também que o que é especificado no âmbito desta abordagem do problema não é uma distribuição do fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo mas sim uma dependência da densidade de fluxo de energia em relação ao valor local da temperatura da superfície do cátodo, sendo esta conhecida *a priori*. Em particular, não é feita qualquer permissa no sentido de estabelecer qual a parte da superfície do cátodo onde é colectada a corrente e qual a parte que está em contacto com o gás frio; por outras palavras, a condição de fronteira (1.2) é igualmente aplicada a ambas as partes 1 e 2 da superfície do cátodo indicadas na figura 1.1. Uma vez tendo resolvido o problema da condução térmica (1.1)-(1.3), teremos informação completa da distribuição da temperatura no cátodo e também das distribuições das densidades de fluxo de energia e de corrente eléctrica sobre a superfície do cátodo.

No âmbito da abordagem acima referida, uma descrição da interacção arco-cátodo deverá ser feita em três passos.

No primeiro passo, o problema unidimensional que descreve a transferência de corrente através da camada de plasma junto ao cátodo é resolvido e todos os parâmetros da camada são determinados como funções de  $T_w$  e  $U$ . Em particular, são determinadas as densidades de fluxo de energia e de corrente eléctrica provenientes do plasma para a parte da superfície do cátodo colectora de corrente,  $q_p = q_p(T_w, U)$  e  $j = j(T_w, U)$ .

As funções  $q_p$  e  $j$  determinadas no primeiro passo são definidas apenas para valores suficientemente elevados de  $T_w$ .

No segundo passo, uma função  $q = q(T_w, U)$  deve ser introduzida, a qual é definida para todos os valores da temperatura acima da temperatura de arrefecimento,  $T_w \geq T_c$ . Para altos valores de  $T_w$ , a função  $q$  é muito próxima da função  $q_p$ . Para baixos valores de  $T_w$ , a função  $q$  descreve a troca de calor entre o cátodo e o gás frio e ou as perdas de energia por radiação pela parte da superfície do cátodo que está em contacto com o gás frio. A função  $j$  deve ser igualada a zero para baixos valores de  $T_w$ .

Finalmente, no terceiro passo, procedemos à resolução do problema (1.1)-(1.3).

No terceiro passo é conveniente considerar como variável dependente o potencial de fluxo de calor (ver, por exemplo, o livro de Carslaw e Jaeger [52])

$$\psi = \int_{T_c}^T \kappa(T) dT. \quad (1.5)$$

em vez da temperatura. Então, o problema (1.1)-(1.3) transforma-se no problema não linear com condições de fronteira para a equação de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (1.6)$$

$$\Gamma_h : \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = q(\psi_w, U), \quad \Gamma_c : \quad \psi = 0, \quad (1.7)$$

onde  $\Gamma_h$  é a parte da superfície do cátodo que está em contacto com o plasma ou com o gás frio (junção das partes 1 e 2 da superfície do cátodo indicadas na figura 1.1),  $\Gamma_c$  é a parte da superfície do cátodo mantida a uma temperatura constante,  $T_c$ , pelo arrefecimento externo (parte 3 da superfície do cátodo indicada na figura 1.1);  $q(\psi_w, U)$  é a função que se obtém da função  $q(T_w, U)$  por transformação da variável independente  $T_w$  na variável independente  $\psi_w$ .

## 1.5 Qual é a razão da existência de múltiplas soluções para o problema da transferência de corrente para cátodos refractários?

Sem entrar em detalhes por agora, vamos expor as razões físicas da existência de múltiplas soluções para o problema (1.1)-(1.3) [ou (1.6), (1.7)].

Nas figuras 1.2 e 1.3, são apresentadas as funções  $q$  e  $j$ , para diferentes valores da queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo, para o caso de um cátodo de tungsténio a operar num plasma de argon. Sem entrar na discussão destas funções por agora (uma discussão detalhada será feita no capítulo 2), salientamos que se trata de funções fortemente não lineares do valor local da temperatura da superfície do cátodo. É de salientar também a semelhança das dependências da função  $q$  em relação a  $T_w$  e a  $\psi_w$  (ver figura 1.2).

A consequência mais importante da não monotonia da dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  é a existência de múltiplas soluções, a qual pode ser explicada da maneira que a seguir se descreve. Vamos considerar o caso particular de um cátodo cilíndrico (de secção recta não necessariamente circular) com a superfície lateral termicamente e electricamente isolada, o qual foi estudado por Benilov [35]. Neste caso o problema (1.6), (1.7) toma a forma seguinte

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (1.8)$$

$$z = 0 : \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -q(\psi, U), \quad \Gamma : \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad z = h : \quad \psi = 0, \quad (1.9)$$

onde  $z$  é uma coordenada medida ao longo da direcção longitudinal do cátodo e dirigida do topo ( $z = 0$ ) para a base do cátodo ( $z = h$ ), sendo  $h$  a altura do cátodo;  $\Gamma$  designa a superfície lateral do cátodo e  $n$  é uma direcção perpendicular á superfície lateral do cátodo em cada ponto considerado.

O problema (1.8), (1.9) pode ter uma solução unidimensional  $\psi = \psi(z)$ . Para esta solução o problema (1.8), (1.9) toma a forma

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} = 0, \quad (1.10)$$

$$z = 0 : \quad \frac{d\psi}{dz} = -q(\psi, U), \quad z = h : \quad \psi = 0. \quad (1.11)$$

A solução geral da equação (1.10) é da forma

$$\psi(z) = c_1 z + c_2, \quad (1.12)$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes de integração. Substituindo (1.12) na segunda condição de (1.11) obtemos a seguinte relação entre  $c_1$  e  $c_2$

$$c_1 h + c_2 = 0. \quad (1.13)$$

A expressão (1.12) mostra que  $c_2$  é o valor de  $\psi$  no topo do cátodo ( $z = 0$ ), o qual passamos a representar por  $\psi_w$ . Assim, de (1.13) segue que  $c_1 = -\psi_w/h$ , o que permite escrever a solução da equação (1.10) na forma

$$\psi = \left(1 - \frac{z}{h}\right) \psi_w. \quad (1.14)$$

O valor  $\psi_w = \psi_w(U)$  é determinado pela primeira condição de (1.11), sendo, portanto, uma raíz da equação transcendente

$$\frac{\psi_w}{h} = q(\psi_w, U). \quad (1.15)$$

A solução (1.14) mostra que o potencial de fluxo de calor em todos os pontos do topo do cátodo é igual a  $\psi_w$  (o que significa que a temperatura no topo do cátodo tem um valor constante), por conseguinte esta solução descreve o modo difuso de transferência de corrente para o cátodo.

Como exemplo, na figura 1.2c o lado esquerdo da equação (1.15) é representado pela linha pontuada para  $h = 10$  mm. Podemos ver que a equação (1.15) tem duas raízes positivas, desde que  $U$  exceda um determinado valor mínimo, o qual está situado entre 10 V e 12 V. A raíz menor está posicionada na secção crescente da função  $q$  enquanto a raíz maior está posicionada na secção decrescente. Para além das raízes positivas,

a equação (1.15) tem também uma solução trivial  $\psi_w = 0$  a qual existe para todos os valores de  $U$  [podemos assumir com uma precisão muito boa que  $q(T_c, U) = 0$ ] e corresponde à situação na qual não há transferência de corrente para o cátodo.

A característica tensão-corrente do modo difuso está representada na figura 1.4 para o caso de um cátodo cilíndrico com raio  $R = 2$  mm e altura  $h = 10$  mm. A característica tensão-corrente é não monótona, estando a secção decrescente associada à menor raiz positiva da equação (1.15) e a secção crescente à maior raiz. Para além desta linha, a característica tensão-corrente no seu todo também inclui um ramo coincidente com o eixo das tensões, o qual está associado à raiz nula da equação (1.15). Por conseguinte, a característica tensão-corrente descrita pela solução unidimensional é biestável (forma-N) e é de esperar que para além da solução unidimensional que descreve o modo difuso, possam existir também soluções multidimensionais que descrevam modos mancha. Esta última hipótese foi confirmada pela análise de bifurcações desenvolvida por Benilov [35] e será reconfirmada pelos cálculos numéricos e generalizada para o caso de cátodos com a superfície lateral activa (colectora de energia e de corrente; caso de interesse prático) nesta dissertação.

Concluindo, vemos que a não monotonia da dependência da densidade de fluxo de energia (proveniente do plasma para a superfície do cátodo) em relação à temperatura da superfície do cátodo resulta a biestabilidade (forma-N) das características tensão-corrente do modo difuso e múltiplas soluções para o problema da transferência de corrente para o cátodo.

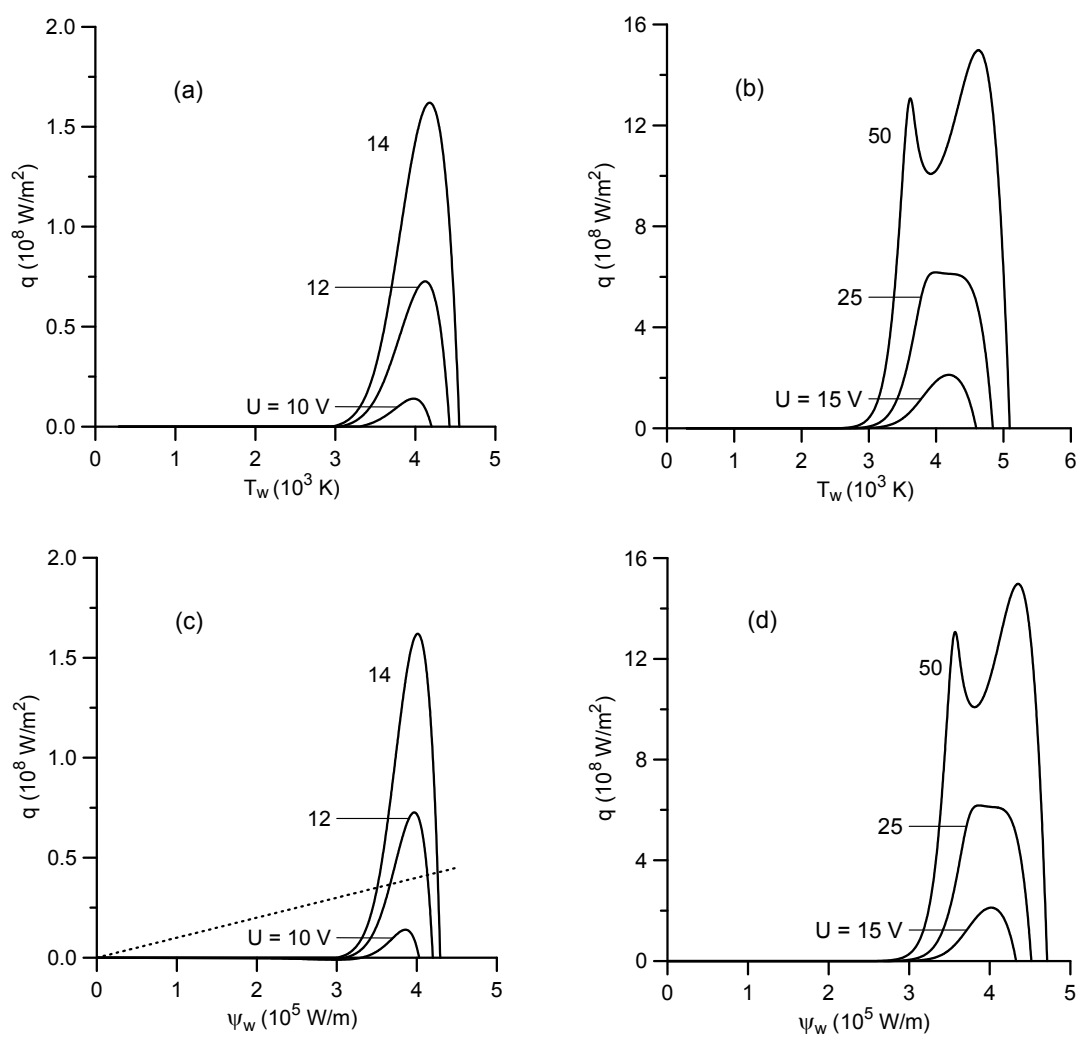


Figura 1.2: Densidade de fluxo de energia total proveniente do plasma para a superfície do cátodo em função do valor local da temperatura da superfície do cátodo (a, b) ou do potencial de fluxo de calor (c, d). Cátodo de tungstênio a operar num plasma de argon à pressão de 1 atm.

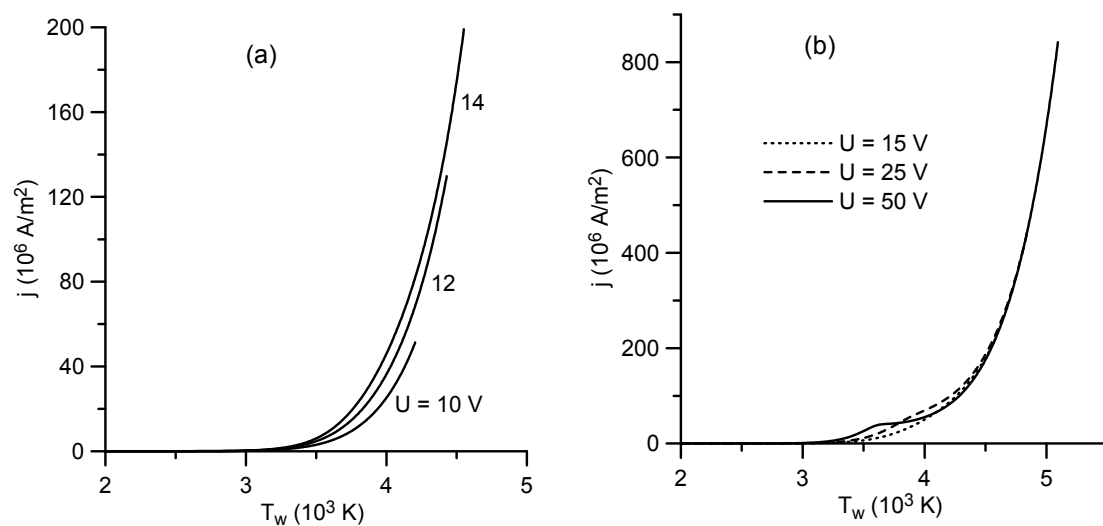


Figura 1.3: Densidade de corrente eléctrica proveniente do plasma para a superfície do cátodo em função do valor local da temperatura da superfície do cátodo. Cátodo de tungsténio a operar num plasma de argon à pressão de 1 atm.

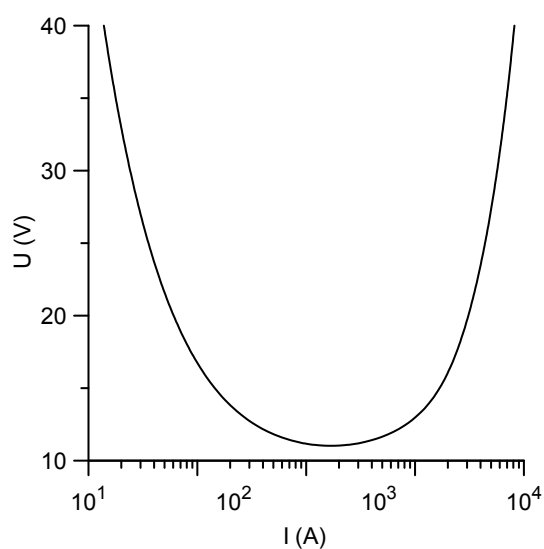


Figura 1.4: Característica tensão-corrente para o caso de um cátodo cilíndrico de tungsténio de raio 2 mm e altura 10 mm a operar no modo difuso num plasma de argon à pressão de 1 atm.



## Capítulo 2

# Características da camada de plasma junto ao cátodo e modo difuso a baixas correntes

*Um modelo da camada de plasma junto ao cátodo para uma pressão da ordem de uma ou várias atmosferas é reconsiderado com base em recentes resultados teóricos. A física da camada de plasma junto ao cátodo é analisada para valores da queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo até 50 V, de acordo com resultados experimentais recentes. Foi encontrado que a não monotonia da dependência da densidade de fluxo de energia (proveniente do plasma para a superfície do cátodo) em relação à temperatura da superfície do cátodo, para um valor fixo da queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo, é causada por um dos três mecanismos: sobreposição do aumento do aquecimento devido aos iões e aos electrões do plasma pelo aumento do arrefecimento devido à emissão termiónica à medida que o plasma se aproxima da ionização completa; não monotonia da dependência da corrente iónica em relação à temperatura dos electrões, causada pelo desvio da corrente iónica relativamente ao valor previsto pela teoria da difusão; rápido aumento do aquecimento devido aos electrões do plasma, o qual é subsequentemente sobreposto pelo arrefecimento devido à emissão termiónica. As funções que descrevem as densidades de fluxo de energia e de corrente eléctrica proveniente do plasma para a superfície do cátodo foram usadas para fechar o problema formulado no capítulo 1. A validação do modelo resultante é feita com base na modelação numérica da descarga difusa nas condições de funcionamento de uma lâmpada HID experimental.*

## 2.1 Introdução

Em 1995 Benilov e Marotta [49] propuseram um modelo para a camada de plasma junto ao cátodo, para um plasma de arco no intervalo de pressões da ordem da pressão atmosférica. Neste modelo, o fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo é gerado numa fina camada de plasma adjacente à superfície do cátodo. Esta camada compreende três regiões: bainha de carga de espaço, camada de ionização e camada de relaxação térmica. O modelo de Benilov e Marotta [49] tem sido usado para o tratamento analítico e para a modelação numérica de muitas situações. Como exemplo, referimos o trabalho de Benilov e Marotta [49], onde o referido modelo foi usado para calcular os parâmetros de uma mancha catódica para diferentes combinações cátodo/plasma; o trabalho de Benilov [35], onde foi desenvolvida uma teoria de bifurcações para a transferência de corrente para cátodos refractários; os trabalhos de Hu et al [53] e de Wendelstorf [54], onde foram efectuadas modelações numéricas bidimensionais da interacção plasma-cátodo com vista à aplicação em lâmpadas HID; o trabalho de Nielsen et al [55], onde foi investigado o comportamento da camada de plasma junto ao cátodo num extenso intervalo de pressões e temperaturas, em termos da corrente e das transferências de calor e de massa, tendo em consideração a vaporização do material do cátodo; o trabalho de Janssen *et al* [56], onde foi desenvolvida uma abordagem com vista à modelação de plasmas com vários componentes, num grande intervalo de pressões ( $10^{-3}$  a 1 bar), em condições de equilíbrio e não equilíbrio termodinâmico local (esta abordagem permite a modelação de lâmpadas sem eléctrodos).

Um modelo da camada de plasma junto ao cátodo alternativo ao de Benilov e Marotta [49] foi proposto por Fischer [9] para a modelação de lâmpadas HID. O modelo de Fischer [9] tem sido utilizado em vários trabalhos, ver, por exemplo, os trabalhos de Flesch et al [57], de Flesch e Neiger [58, 59, 60, 61, 62] e de Krücken [42]. No modelo de Fischer a separação das cargas não é tomada em consideração, por isso este modelo não é capaz de prever os altos valores da queda tensão junto ao cátodo observados experimentalmente. Mais ainda, o modelo de Fischer baseia-se num modelo cinético da ionização e da recombinação que não está em conformidade com o princípio do equilíbrio detalhado [63].

## 2.2 Modelo da camada de plasma junto ao cátodo

A designação *camada de plasma junto ao cátodo* quando aplicada à modelação da interacção plasma-cátodo numa descarga de arco de alta pressão, é usada para designar uma região de plasma de não equilíbrio que separa a superfície do cátodo do

volume do plasma (coluna de arco) na qual existe equilíbrio termodinâmico local. Por outras palavras, trata-se de uma região do plasma adjacente à superfície do cátodo onde estão localizados os desvios do equilíbrio termodinâmico local. É na camada de plasma junto ao cátodo que se forma o fluxo de energia dirigido para o cátodo. Nesta camada existem três tipos de desvios relativamente ao equilíbrio termodinâmico local. São eles, um desvio da temperatura dos electrões ( $T_e$ ) relativamente à temperatura das partículas pesadas (átomos e iões,  $T_h$ ), uma violação do equilíbrio de ionização (isto é, um desvio da densidade dos electrões ( $n_e$ ) relativamente à densidade de equilíbrio ( $n_e^{(Saha)}$ ) definida pela equação de Saha) e uma violação da quase-neutralidade, isto é, uma desigualdade entre as densidades dos electrões e dos iões. Estes desvios podem ser caracterizados por diferentes escalas de comprimento. Assim, o desvio da temperatura dos electrões relativamente à temperatura das partículas pesadas é caracterizado pelo comprimento de relaxação térmica dos electrões ( $\lambda_u$ ), a violação do equilíbrio de ionização é caracterizada pelo comprimento de ionização ( $d$ ) e a violação da quase-neutralidade é caracterizada pelo comprimento de Debye ( $\lambda_D$ ). Atendendo a que estas escalas são usualmente muito diferentes, a camada de plasma junto ao cátodo, no modelo desenvolvido por Benilov e Marotta [49], é dividida em três regiões (conforme está esquematizado na figura 2.1): a baínha de carga de espaço, a qual é adjacente à superfície do cátodo e onde está localizado o desvio da quase-neutralidade; a camada de ionização, a qual é adjacente à baínha e onde está localizado o desvio do equilíbrio de ionização; e a camada de relaxação térmica, a qual é adjacente à camada de ionização e onde a temperatura dos electrões é diferente da temperatura das partículas pesadas.

No âmbito do modelo da interacção plasma-cátodo usado nesta dissertação, a superfície do cátodo é aquecida pelos iões produzidos na camada de ionização e acelerados pelo campo eléctrico na baínha de carga de espaço (é assumido que na baínha os iões não sofrem colisões) e pelos electrões rápidos do plasma que são capazes de vencer a barreira de potencial e atingir a superfície do cátodo; o mecanismo dominante de arrefecimento da parte da superfície do cátodo colectora de corrente é o arrefecimento devido à emissão termiónica. Por conseguinte, as regiões da camada de plasma junto ao cátodo mais importantes são a baínha de carga de espaço e a camada de ionização. Vamos fazer estimativas para as escalas características destas duas regiões no caso de um plasma de arco de argon à pressão de 1 atm com  $T_h = 4 \times 10^3$  K e  $T_e$  a variar entre 1 eV (valor típico para o modo difuso) e 5 eV (valor pertencente ao intervalo de variação de  $T_e$  no modo mancha). O comprimento de Debye é estimado pela expressão convencional

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{n_e e^2}}, \quad (2.1)$$

onde  $\varepsilon_0$  é a constante dielétrica do vácuo,  $k$  a constante de Boltzman e  $e$  a carga eléctrica do electrão. O comprimento de ionização é estimado com base na equação (13) do trabalho de Benilov [64]

$$d = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{D_a k T_h}{k_i p}}, \quad (2.2)$$

onde  $C$  é um coeficiente que depende da razão  $T_e/T_h$  e do grau de ionização do plasma ( $C$  varia aproximadamente entre 0.67 e 1; por isso foi omitido na estimativa do valor de  $d$ ),  $k_i$  é a constante de velocidade de ionização,  $p$  é a pressão do plasma.  $D_a$  é o coeficiente de difusão ambipolar, o qual é definido pela expressão

$$D_a = \frac{(T_h + T_e) D_{ia} D_{ea}}{T_h D_{ea} + T_e D_{ia}}, \quad (2.3)$$

onde  $D_{ia}$  e  $D_{ea}$  são coeficientes cinéticos que descrevem as forças de fricção entre iões ou electrões e átomos. No âmbito da primeira aproximação na expansão em polinómios de Sonine pelo método de Chapman-Enskog, os coeficientes  $D_{ia}$  e  $D_{ea}$  são dados pelas expressões

$$\begin{aligned} D_{ia} &= \frac{3\pi}{16} \left( \frac{4kT_h}{\pi m_a} \right)^{1/2} \frac{kT_h}{p \bar{Q}_{ia}^{(1,1)}} \\ D_{ea} &= \frac{3\pi}{16} \left( \frac{2kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} \frac{kT_h}{p \bar{Q}_{ea}^{(1,1)}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde  $m_a$  e  $m_e$  são as massas do átomo e do electrão, respectivamente;  $\bar{Q}_{ia}^{(1,1)}$  e  $\bar{Q}_{ea}^{(1,1)}$  são as secções eficazes médias para a transferência de momento entre iões ou electrões e átomos.

Na tabela 2.1 apresenta-se os valores de  $\lambda_D$  e  $d$  para o intervalo de variação de  $T_e$  considerado. A não monotonia de  $\lambda_D$  relativamente a  $T_e$  resulta da não monotonia de  $n_e$  relativamente a  $T_e$ : durante o aquecimento inicial do gás  $n_e$  aumenta à medida que  $T_e$  aumenta, atingindo um máximo quando o plasma fica completamente ionizado; um posterior aumento de  $T_e$  conduz a uma diminuição de  $n_e$  de modo a que a pressão do plasma permaneça constante.

Da tabela 2.1 vemos que a espessura da camada de ionização é superior à da bainha de carga de espaço. No entanto, a espessura da camada de ionização é muito inferior à escala característica transversal que podemos associar a cada um dos modos de transferência de corrente para o cátodo: raio do cátodo (da ordem de 1 mm) no caso do modo difuso (no qual  $T_e \approx 1$  eV) ou diâmetro da mancha (da ordem de 40  $\mu\text{m}$ ) no caso do modo mancha (no qual  $T_e \gtrsim 5$  eV).

$T_e$ (eV)	$\lambda_D$ ( $\mu\text{m}$ )	$d$ ( $\mu\text{m}$ )
1	0.025	86.925
2	0.020	4.296
3	0.030	1.537
4	0.039	0.924
5	0.048	0.686

Tabela 2.1: Escalas características do plasma junto ao cátodo, em função da temperatura dos electrões, para o caso de um plasma de argon à pressão de 1 atm com  $T_h = 4 \times 10^3$  K.

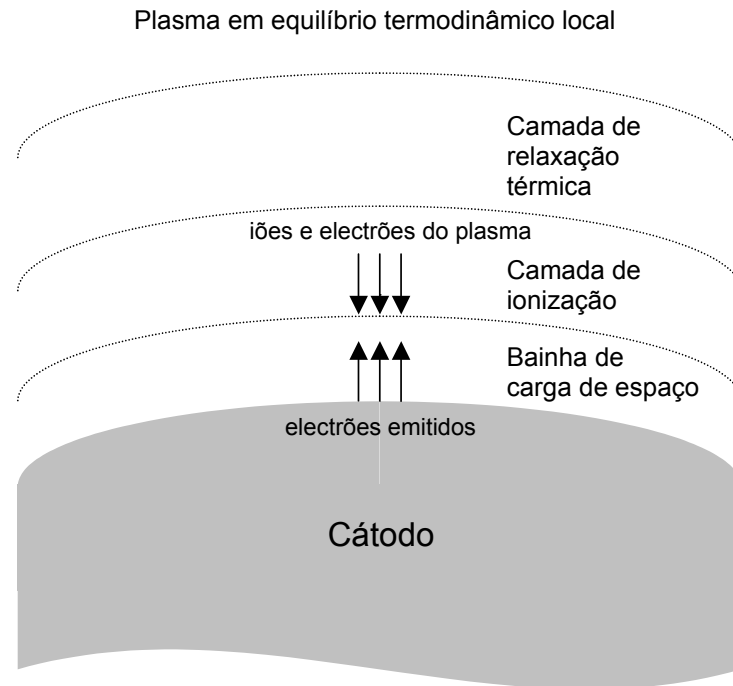


Figura 2.1: Estrutura da camada de plasma junto ao cátodo.

### 2.2.1 Modificações introduzidas no modelo de Benilov e Marotta

Nesta dissertação são introduzidas três modificações no modelo de Benilov e Marotta [49]. A primeira modificação está relacionada com o cálculo da densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo. No âmbito do modelo de Benilov e Marotta [49], a densidade de fluxo de energia gerada pelo plasma e recebida pela superfície do cátodo,  $q_p$ , é dada pela seguinte expressão (equação (13) de [49])

$$q_p = q_i + q_e - q_{em}, \quad (2.5)$$

onde

$$q_i = J_i \left[ ZeU_D + E - ZA_{\text{eff}} + k \left( 2T_h + \frac{ZT_e}{2} - 2T_w \right) \right], \quad (2.6)$$

$$q_e = J_e (2kT_e + A_{\text{eff}}), \quad (2.7)$$

$$q_{em} = J_{em} (2kT_w + A_{\text{eff}}). \quad (2.8)$$

Aqui e no que se segue  $q_i$  e  $q_e$  são as densidades de fluxo de energia fornecidas à superfície do cátodo pelos iões e pelos electrões rápidos do plasma, respectivamente;  $q_{em}$  é a densidade de energia perdida pela superfície do cátodo devido à emissão termiónica;  $J_i$ ,  $J_e$ , e  $J_{em}$  são as densidades numéricas dos respectivos fluxos;  $j_i = ZeJ_i$  é a densidade de corrente eléctrica fornecida à superfície do cátodo pelos iões;  $j_e = eJ_e$  é a densidade de corrente eléctrica proveniente do cátodo para o plasma, transportada pelos electrões rápidos;  $j_{em} = eJ_{em}$  é a densidade de corrente de emissão termiónica;  $T_h$  e  $T_e$  são as temperaturas das partículas pesadas (iões e átomos neutros) e dos electrões na camada de plasma junto ao cátodo, respectivamente;  $Z$  e  $E$  são, respectivamente, a carga numérica média dos iões e a energia de ionização média na camada de plasma junto ao cátodo;  $U_D$  é a queda de tensão na bainha de carga de espaço;  $A_{\text{eff}}$  é a função de trabalho efectiva (calculada pela fórmula  $A_{\text{eff}} = A - \Delta A$ , sendo  $A$  a função de trabalho e  $\Delta A$  a correcção de Schottky);  $e$  é a carga electrónica e  $k$  é a constante de Boltzmann.

Nas condições em que é apreciável a diminuição da função de trabalho devido à presença de um campo eléctrico (efeito de Schottky) é lógico assumir que a energia ganha por um electrão, emitido pela superfície do cátodo, ao atravessar a bainha de carga de espaço é  $eU_D - \Delta A$ . O mesmo acontece para a energia ganha (perdida) por um ião monopositivo (electrão rápido do plasma) ao se mover para o cátodo. Assim, é apropriado substituir  $eU_D$  por  $eU_D - \Delta A$  na equação (2.6), o que conduz a

$$q_i = J_i \left[ ZeU_D + E - ZA + k \left( 2T_h + \frac{ZT_e}{2} - 2T_w \right) \right]. \quad (2.9)$$

Designemos por  $W_i$  o trabalho realizado pelo campo eléctrico sobre os iões na camada de ionização. No âmbito do modelo de Benilov e Marotta [49],  $W_i$  é estimado

pelo produto da densidade de corrente iónica média na camada de ionização,  $j_i/2$ , pela queda de tensão na camada de ionização,  $U_i = U - U_D$ , a qual é dada pela equação (equação (16) de [49])

$$U_i = \frac{kT_e}{e} \ln \frac{n_{e\infty}}{n_{es}}, \quad (2.10)$$

onde  $n_{e\infty}$  e  $n_{es}$  são as densidades numéricas dos electrões na margem da camada de ionização (densidade de equilíbrio) e na margem da bainha de carga de espaço, respectivamente. Tendo em conta  $W_i$ , a equação (2.9) pode ser reescrita na seguinte forma

$$q_i = J_i (ZeU_D + E - ZA) + W_i + \left[ J_i k \left( 2T_h + \frac{ZT_e}{2} \right) - (J_i 2kT_w + W_i) \right]. \quad (2.11)$$

No âmbito do modelo de Benilov e Marotta [49], o primeiro termo dentro do parêntesis recto no lado direito da equação (2.11) representa o fluxo de energia dos iões que saem da camada de ionização para a bainha de carga de espaço. O segundo termo representa a soma do fluxo de energia dos átomos neutros que entram na camada de ionização (com a mesma energia com que deixaram a superfície do cátodo após terem sido produzidos na neutralização dos iões incidentes) com o trabalho realizado pelo campo eléctrico sobre os iões na camada de ionização. Numa situação estacionária, estes termos deverão ser iguais. (De facto, a condição de igualdade entre estes termos representa a equação do balanço da energia das partículas pesadas na camada de ionização.) Por conseguinte, o último termo no lado direito da equação (2.11) deve ser removido, assumindo esta equação a seguinte forma

$$q_i = J_i (ZeU_D + E - ZA) + W_i. \quad (2.12)$$

Nesta dissertação, a densidade de fluxo de energia dos iões é determinada pela equação (2.12) em vez da equação (2.6).

Uma forma equivalente da equação (2.5) suplementada com as equações (2.7), (2.8) e (2.12) pode ser obtida como se segue. Introduzindo na equação (17) de [49], a qual descreve o balanço da energia dos electrões na camada de ionização, uma correcção semelhante à que foi introduzida aquando da obtenção da equação (2.9), podemos escrever

$$j_e \left( 2\frac{kT_e}{e} + U_D - \frac{\Delta A}{e} \right) + 3.2j\frac{kT_e}{e} + J_i E = j_{em} \left( 2\frac{kT_w}{e} + U_D - \frac{\Delta A}{e} \right) + W_e. \quad (2.13)$$

Na equação (2.13),  $j = j_i + j_{em} - j_e$  é a densidade de corrente eléctrica total proveniente do plasma para a superfície do cátodo e  $W_e$  é o trabalho realizado pelo campo eléctrico sobre os electrões na camada de ionização, o qual está relacionado com  $W_i$  pela fórmula  $W_e + W_i = jU_i$ . Note-se que os termos no lado esquerdo descrevem sumidouros

da energia dos electrões na camada de ionização, nomeadamente, o fluxo de energia transportado pelos electrões rápidos que saem da camada de ionização para a bainha de carga de espaço, o fluxo de energia transportado pelos electrões que saem da camada de ionização para o volume do plasma e a energia dos electrões que é perdida no interior da camada de ionização no processo de ionização. Os termos no lado direito descrevem fontes, nomeadamente, a energia introduzida na camada de ionização pelos electrões emitidos pela superfície do cátodo e acelerados na bainha de carga de espaço e o trabalho realizado pelo campo eléctrico sobre os electrões no interior da camada de ionização.

Substituindo as equações (2.7), (2.8) e (2.12) na equação (2.5), adicionando a relação obtida à equação (2.13) e fazendo uso da fórmula  $W_e + W_i = jU_i$ , obtemos para  $q_p$  a seguinte expressão

$$q_p = jU - \frac{j}{e} (A + 3.2kT_e). \quad (2.14)$$

A equação (2.14) tem um significado físico distinto: o fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo representa a diferença entre a potência eléctrica depositada na camada de plasma junto ao cátodo por unidade de área e a potência transportada da camada de plasma junto ao cátodo para o volume do plasma pela corrente electrónica, sendo esta última calculada tendo em atenção a energia necessária para extrair electrões da superfície do cátodo. Pelo acima exposto, torna-se óbvio que a substituição da equação (2.6) pela equação (2.12) significa que  $q_p$  deve ser calculado a partir da equação (2.14).

A segunda modificação introduzida no modelo de Benilov e Marotta [49], nesta dissertação, consiste em considerar que os iões existentes no plasma são monopositivos. A razão desta modificação reside no facto de serem precisamente estes iões que dão a contribuição dominante para a corrente iónica total no sentido da superfície do cátodo (ver o trabalho de Almeida *et al* [65]). Por conseguinte, há que fazer  $Z = 1$  na equação (2.12).

A terceira modificação está relacionada com o cálculo da densidade numérica de fluxo de iões  $J_i$  proveniente da camada de ionização para a margem da bainha de carga de espaço. No âmbito do modelo de Benilov e Marotta [49], a densidade numérica dos iões na fronteira interior da camada de ionização  $n_{is}$  é calculada através da equação (equação (41) de [66])

$$f_w = \frac{0.8}{2 + \alpha}, \quad (2.15)$$

onde  $f_w = n_{is}/n_{i\infty}$ , sendo  $n_{i\infty}$  a densidade numérica dos iões na fronteira exterior da camada de ionização (densidade de equilíbrio, calculada pela equação de Saha). Uma vez calculada a função  $f_w(\alpha)$ , a densidade  $J_i$ , acima mencionada, é calculada



pela expressão  $J_i = n_{i\infty} v_s f_w$ , onde  $v_s = [k(T_h + T_e)/m_i]^{1/2}$  é a velocidade com que os iões entram na bainha (calculada pelo critério de Bohm);  $m_i$  é a massa de um ião. O parâmetro  $\alpha$  que aparece na equação (2.15) pode ser determinado pela equação (equação (56) de [67])

$$\alpha = \left[ \frac{2 C_{ia} \bar{Q}_{ia}^{(1,1)}}{3 k_i} \right]^{1/2}, \quad (2.16)$$

onde  $C_{ia} = (16kT_h/\pi m_i)^{1/2}$ , podendo  $\alpha$  ser interpretado como a razão entre o comprimento de ionização e o livre percurso médio para as colisões ião-átomo. No caso específico  $\alpha \gg 1$ , a equação (2.15) dá os resultados convencionais da teoria da difusão: a velocidade média dos iões é da ordem do produto da velocidade térmica (caótica) pelo número de Knudsen (razão entre o livre percurso média para as colisões ião-átomo e o comprimento de ionização).

No trabalho de Benilov e Naidis [67] foi deduzida a seguinte equação (equação (50) de [67])

$$f_w = \frac{\alpha C_1 \sqrt{1+\beta}}{C_1 + 2\alpha C_1 \sqrt{1+\beta} + \alpha^2 \sqrt{1+\beta}}, \quad \beta = T_e/T_h, \quad (2.17)$$

a qual representa uma fórmula mais correcta para determinar a função  $f_w(\alpha)$ ;  $C_1$  é um coeficiente dado pela equação (equação (11) de [67])

$$C_1 = \left[ \frac{(1+\beta)(2+\beta)}{\beta^2} - \frac{2(1+\beta)^2}{\beta^3} \ln(1+\beta) \right]^{1/2}.$$

Nesta dissertação a função  $f_w(\alpha)$  foi calculada através da equação (2.17) com a diferença que o coeficiente  $C_1$  foi substituído pelo coeficiente  $C_2$  determinado pela equação (equação (37) de [66])

$$C_2 = \left[ -\frac{3A_1+4}{3A_2} + \frac{(A_1+1)(2A_1+1)}{A_2^2} + \frac{2(A_1+1)^2}{A_2^3} - \frac{2(A_1+1)^2(A_2+1)(\gamma+1)}{A_2^4} \ln \left( 1 + \frac{\beta}{\gamma+1} \right) \right]^{1/2}, \quad (2.18)$$

onde  $A_1 = \gamma(1+\beta)$ ,  $A_2 = \beta\gamma$  e  $\gamma = n_{i\infty}/n_{a\infty}$ , sendo  $n_{a\infty}$  a densidade numérica dos átomos na fronteira exterior da camada de ionização. É de realçar que a função  $f_w(\alpha)$  definida pela equação (2.17) com a substituição de  $C_1$  por  $C_2$  permite calcular a densidade de fluxo de iões  $J_i$  não só no caso de um plasma completamente ionizado (situação para a qual a equação (2.17) foi deduzida) como também no caso de um plasma com um grau de ionização arbitrário.

Com a excepção das três modificações acima descritas, o modelo da camada de plasma junto ao cátodo usado nesta dissertação coincide com o modelo de Benilov e

Marotta [49]. O procedimento seguido para resolver o problema da transferência de corrente através da camada de plasma junto ao cátodo é o mesmo que foi descrito na secção 3.3 de [49].

Nas figuras 2.2-2.7 são apresentados alguns resultados dos cálculos efectuados para um plasma de argon à pressão atmosférica e um cátodo de tungsténio. Nestes cálculos, a constante de velocidade de ionização  $k_i$  é calculada como a soma da constante de velocidade de ionização directa, determinada de acordo com o trabalho de Voronov [68], com a constante de velocidade de ionização «stepwise», determinada de acordo com o trabalho de Benilov e Naidis [67]; as secções eficazes para a transferência de momento nas colisões ião-átomo foram tomadas do trabalho de Devoto [51]. Nesta dissertação foi usado o valor de 4.55 eV para a função de trabalho do tungsténio e o valor de  $6.02 \times 10^5 \text{ A/m}^2 \text{ K}^2$  para o factor pré-exponencial  $A_R$  (constante de Richardson) da equação de Richardson-Schottky [25]

$$j_{em} = A_R T_w^2 \exp[-(A - \Delta A)/kT_w], \quad (2.19)$$

com a correcção de Schottky dada por

$$\Delta A = e(eE_w/4\pi\epsilon_0)^{1/2}, \quad (2.20)$$

onde  $E_w$  é a intensidade do campo eléctrico na superfície do cátodo.

Note-se que poderíamos pensar em suplementar o modelo com uma equação para o balanço da energia das partículas pesadas na camada de ionização, o que podia ser feito igualando a zero o último termo no lado direito da equação (2.11). Esta equação, em princípio, permitiria-nos determinar de uma forma autoconsistente a temperatura das partículas pesadas  $T_h$ . Contudo, cálculos efectuados para condições de interesse experimental mostraram que uma variação de  $T_h$  num grande intervalo não produz um efeito apreciável nos resultados dados pelo modelo acima descrito (ver secção 2.5). Por conseguinte, nesta dissertação não foi usada uma equação para o balanço da energia das partículas pesadas na camada de ionização; a temperatura das partículas pesadas foi considerada igual a 4000 K.

### **2.2.2 Resultados numéricos: fluxos de partículas provenientes do plasma para a superfície do cátodo**

A figura 2.2 mostra a densidade de corrente eléctrica total proveniente do plasma para a superfície do cátodo juntamente com as suas componentes, calculada para um valor fixo de  $U$  e para  $T_w$  variável. Também é apresentada a correcção de Schottky  $\Delta A$  da função de trabalho e a queda de tensão na camada de ionização. Note-se que os dados nesta figura e nas seguintes são apresentados para valores da temperatura da superfície

do cátodo que não excedem um determinado valor. De facto, para temperaturas acima daquele valor  $q_p$  torna-se negativo, o que corresponde a uma situação sem interesse físico por razões que serão discutidas no próximo capítulo.

A corrente transportada pelos electrões rápidos do plasma representa uma contribuição menor em todos os casos (é menor que a corrente de emissão termiónica). A corrente transportada pelos iões representa uma contribuição menor em todo o intervalo de  $T_w$  de interesse no caso de baixas tensões (figura 2.2a). No caso de altas tensões (figura 2.2b), a corrente iónica excede a corrente de emissão termiónica para baixos valores de  $T_w$  e é menor que a corrente de emissão termiónica para altos valores de  $T_w$ . Como era de esperar, a corrente de emissão termiónica cresce rapidamente à medida que aumenta a temperatura da superfície do cátodo, o mesmo acontecendo com a corrente devida aos electrões rápidos do plasma. A corrente iónica cresce rapidamente para baixos valores de  $T_w$ . Para altos valores de  $T_w$ , o seu crescimento abrandando; no caso de altas tensões (figura 2.2b),  $j_i$  passa através de um máximo, começando então a decrescer. O valor máximo de  $j_i$  não depende de  $U$ ; para um plasma de argon à pressão atmosférica este valor é igual a  $2.35 \times 10^7 \text{ A/m}^2$ .

A correcção de Schottky para a função de trabalho aumenta à medida que aumenta a temperatura da superfície do cátodo no caso de baixas tensões. No caso de altas tensões, a correcção de Schottky aumenta para baixos valores de  $T_w$ , passa depois através de um máximo e finalmente decresce. Para um valor fixo de  $T_w$ , a correcção de Schottky aumenta à medida que  $U$  aumenta, excepto no intervalo de altos valores de  $U$  para  $T_w$  elevado, onde decresce ligeiramente. Como exemplo, os valores da correcção de Schottky correspondentes a  $U$  igual a 10 V, 25 V e 50 V são, respectivamente, 0.13 eV, 0.29 eV e 0.43 eV para  $T_w = 3500 \text{ K}$ , enquanto para  $T_w = 4300 \text{ K}$  são, respectivamente, 0.23 eV, 0.35 eV e 0.34 eV. O maior valor da correcção de Schottky encontrado nos cálculos efectuados é 0.45 eV, o qual corresponde ao ponto de máximo da dependência de  $\Delta A$  em relação a  $T_w$  para  $U = 50 \text{ V}$ . O respectivo valor da intensidade do campo eléctrico na superfície do cátodo é  $1.4 \times 10^8 \text{ V/m}$ . Este valor do campo eléctrico está dentro do domínio da emissão termiónica, o qual, segundo o trabalho de Murphy e Good [69], é limitado por um valor máximo de campo eléctrico aproximadamente igual a  $4 \times 10^8 \text{ V/m}$  para uma função de trabalho de 4.5 eV e uma temperatura de 3600 K. Por conseguinte, em todos os cálculos presentes nesta dissertação, a corrente de emissão termiónica foi determinada pela equação de Richardson-Schottky.

A queda de tensão na camada de ionização decresce ligeiramente à medida que  $T_w$  aumenta no caso de  $U = 10 \text{ V}$  (figura 2.2a) e é cerca de 50% da queda de tensão total na camada de plasma junto ao cátodo. No caso de  $U = 50 \text{ V}$  (figura 2.2b),  $U_i$  decresce ligeiramente quando a temperatura da superfície do cátodo é baixa, atinge um valor mínimo e finalmente aumenta, atingindo um valor que é cerca de 30% do valor total

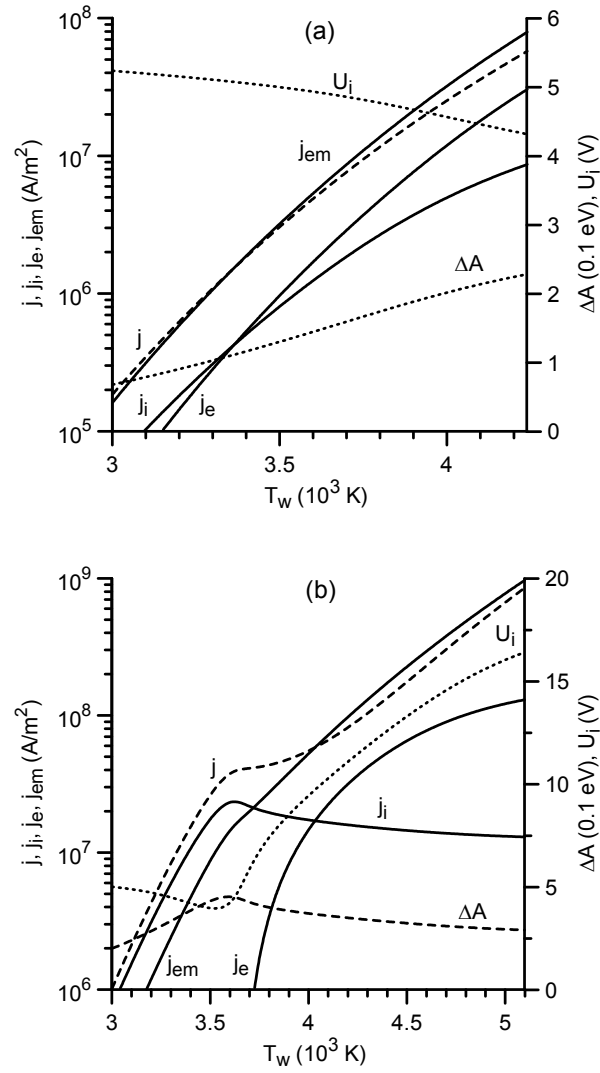


Figura 2.2: Densidade de corrente eléctrica proveniente do plasma para a superfície do cátodo e suas componentes em função da temperatura da superfície do cátodo. (a):  $U = 10$  V. (b):  $U = 50$  V.

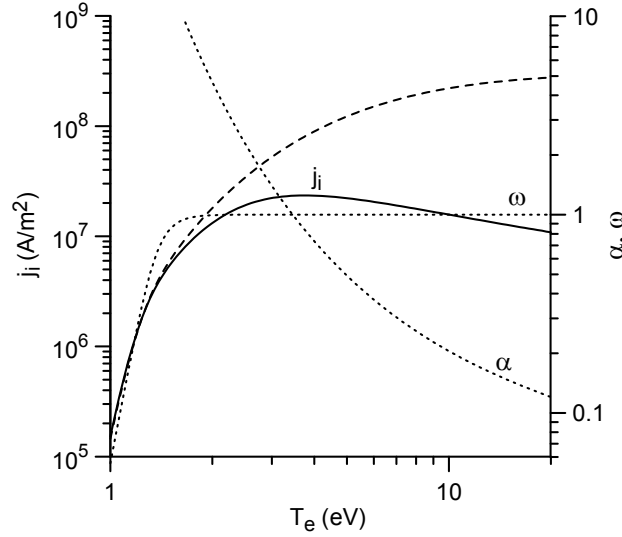


Figura 2.3: Densidade de corrente devida aos íons proveniente do plasma para a superfície do cátodo, parâmetro  $\alpha$  que caracteriza a razão entre o comprimento de ionização e o livre percurso médio para as colisões íon-átomo e grau de ionização na fronteira exterior da camada de ionização em função da temperatura dos electrões. Linha tracejada: densidade de corrente devida aos íons calculada na aproximação da teoria da difusão.

da queda de tensão. Note-se que os valores absolutos de  $U_i$  no caso de  $U = 50$  V são bastante elevados (acima de 10 V).

A Figura 2.2b mostra que a densidade de corrente iónica é uma função não monótona da temperatura da superfície do cátodo. Esta não monotonia pode ser entendida da seguinte forma. No presente modelo, a densidade de corrente iónica é governada pela temperatura dos electrões, pela temperatura das partículas pesadas e pela pressão do plasma. A figura 2.3 mostra a dependência da densidade de corrente iónica em relação à temperatura dos electrões no caso de um plasma de argon à pressão atmosférica com  $T_h = 4000$  K. Nesta figura, as linhas ponteadas representam o parâmetro  $\alpha$  e o valor do grau de ionização  $\omega$  na fronteira exterior da camada de ionização. A linha tracejada representa a densidade de corrente iónica, calculada na aproximação difusa através da fórmula (equação (56) de [64])

$$J_i = \left(1 + \frac{T_e}{T_h}\right) \frac{D_{ia}n_{i\infty}}{d}. \quad (2.21)$$

Para baixos valores da temperatura dos electrões, quando o grau de ionização é muito menor que a unidade, o comprimento de ionização é aproximadamente inversamente proporcional a  $n_{i\infty}$ . Uma vez que num plasma fracamente ionizado  $n_{i\infty}$  aumenta rapidamente à medida que  $T_e$  aumenta, a densidade de corrente iónica, sendo

proporcional a  $n_{i\infty}^2$  para baixos valores de  $T_e$ , cresce muito rapidamente. À medida que a temperatura dos electrões aumenta, o grau de ionização torna-se comparável à unidade; o aumento de  $n_{i\infty}$  abranda, acontecendo o mesmo com a corrente iónica. Aumentado ainda mais a temperatura dos electrões o plasma aproxima-se da ionização completa, tornando-se mesmo completamente ionizado, o que leva a que  $n_{i\infty}$  comece a diminuir. Contudo, o produto  $(1 + T_e/T_h) n_{i\infty}$  é constante num plasma completamente ionizado (coincide, com a precisão de um factor, com a pressão do plasma). Por conseguinte, num plasma completamente ionizado, a densidade de corrente iónica, quando calculada na aproximação difusa, é inversamente proporcional ao comprimento de ionização. Num plasma completamente ionizado, o comprimento de ionização é aproximadamente proporcional a  $\sqrt{T_e/k_i}$ . No intervalo de temperatura dos electrões considerado,  $k_i$  aumenta à medida que  $T_e$  aumenta; o aumento de  $k_i$  é mais rápido que o de  $T_e$ . Por conseguinte, o comprimento de ionização diminui e a densidade de corrente iónica aumenta quando  $T_e$  é elevada, embora mais devagar do que quando  $T_e$  é baixa.

Como consequência do que foi dito acima, a corrente iónica calculada na aproximação difusa aumenta ao longo de todo o intervalo de  $T_e$  considerado, o que pode ser visto na figura 2.3. Contudo, a teoria da difusão fornece uma boa aproximação apenas para baixos valores de  $T_e$ , quando o livre percurso médio para as colisões ião-átomo é muito menor que uma escala de comprimento local (representada pelo comprimento de ionização), isto é, quando  $\alpha \gg 1$ . À medida que  $T_e$  aumenta,  $\alpha$  torna-se comparável à unidade e o crescimento da corrente iónica torna-se mais lento que o previsto pela teoria da difusão. Aumentando ainda mais o valor de  $T_e$ ,  $\alpha$  torna-se muito menor que a unidade e a corrente iónica começa a decrescer. O valor máximo da densidade de corrente iónica presente na figura 2.3 é igual a  $2.35 \times 10^7$  A/m<sup>2</sup>; este valor é igual ao valor máximo da dependência de  $j_i$  em relação a  $T_w$  apresentada na figura 2.2b e é atingido quando  $T_e \approx 3.7$  eV. É de realçar que o valor de 3.7 eV é consideravelmente superior ao valor de  $T_e$  para o qual o plasma torna-se completamente ionizado; por outras palavras, não existe relação directa entre a limitação da corrente iónica e a ionização completa do plasma.

Na figura 2.2a a dependência de  $j_i$  em relação a  $T_w$  é monótona enquanto na figura 2.2b é não monótona. Esta diferença de comportamento pode ser entendida se a temperatura dos electrões na camada de plasma junto ao cátodo for inferior ao valor acima mencionado de 3.7 eV nas condições da figura 2.2a e se for superior a este valor nas condições da figura 2.2b. Este é na verdade o caso, o qual pode ser visto na figura 2.4 onde é apresentada a temperatura dos electrões para as mesmas condições da figura 2.2. Também nesta figura estão representadas as quantidades  $r_E$ ,  $r_e$ ,  $r_j$  e  $r_i$ , as quais são definidas como as razões entre, respectivamente, o segundo termo no lado direito,

o primeiro, o segundo e o terceiro termos no lado esquerdo da equação (2.13) e a soma dos termos no lado direito. Assim,  $r_E$  representa a contribuição do trabalho realizado pelo campo eléctrico sobre os electrões no interior da camada de ionização para o total da energia dos electrões enquanto  $r_e$ ,  $r_j$  e  $r_i$  representam as contribuições de diferentes sumidouros da energia dos electrões na camada de ionização.

Em todos os casos, a contribuição do trabalho realizado pelo campo eléctrico não varia muito com a temperatura da superfície do cátodo. Por conseguinte, a energia total dos electrões na camada de ionização aumenta de uma forma aproximadamente proporcional a  $j_{em}$  à medida que  $T_w$  aumenta. Para baixos valores da temperatura da superfície do cátodo, o processo de ionização constitui o principal sumidouro da energia dos electrões; a densidade de corrente iónica cresce à medida que  $T_w$  aumenta, de uma forma aproximadamente proporcional a  $j_{em}$ . Como foi discutido acima, quando  $\omega$  é baixo a densidade de corrente iónica aumenta muito rapidamente à medida que a temperatura dos electrões aumenta. Por conseguinte, a temperatura dos electrões aumenta lentamente no intervalo de baixos valores de  $T_w$ .

À medida que as temperaturas da superfície do cátodo e dos electrões aumentam, a contribuição das perdas por ionização diminui e o transporte de energia pelos electrões que abandonam a camada de ionização para o volume do plasma torna-se no principal sumidouro da energia dos electrões. A temperatura dos electrões começa a crescer mais rapidamente.

Aumentando ainda mais o valor de  $T_w$ , o aumento da temperatura dos electrões abranda uma vez mais no caso de alta tensão. Podemos ver na figura. 2.4b que isto acontece quando um outro sumidouro se torna importante, nomeadamente, o transporte de energia pelos electrões que abandonam a camada de ionização para a bainha de carga de espaço.

### **2.2.3 Resultados numéricos: fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo**

Na figura 2.5 apresenta-se a densidade de fluxo de energia gerada pelo plasma e recebida pela superfície do cátodo, em função de  $T_w$  e para um valor fixo de  $U$ . As linhas tracejadas representam os dados obtidos sem a primeira e a terceira modificações introduzidas no modelo de Benilov e Marotta [49] no âmbito desta dissertação. Por outras palavras, as linhas tracejadas representam os dados obtidos quando se usa a equação (2.6) em vez da equação (2.12) e a equação (41) de [66] em vez da equação (50) de [67]. Podemos ver que as linhas tracejadas são próximas das linhas a cheio, o que significa que o efeito produzido por estas modificações não é considerável. Também presente na figura 2.5 estão os resultados dos cálculos efectuados com o modelo desta

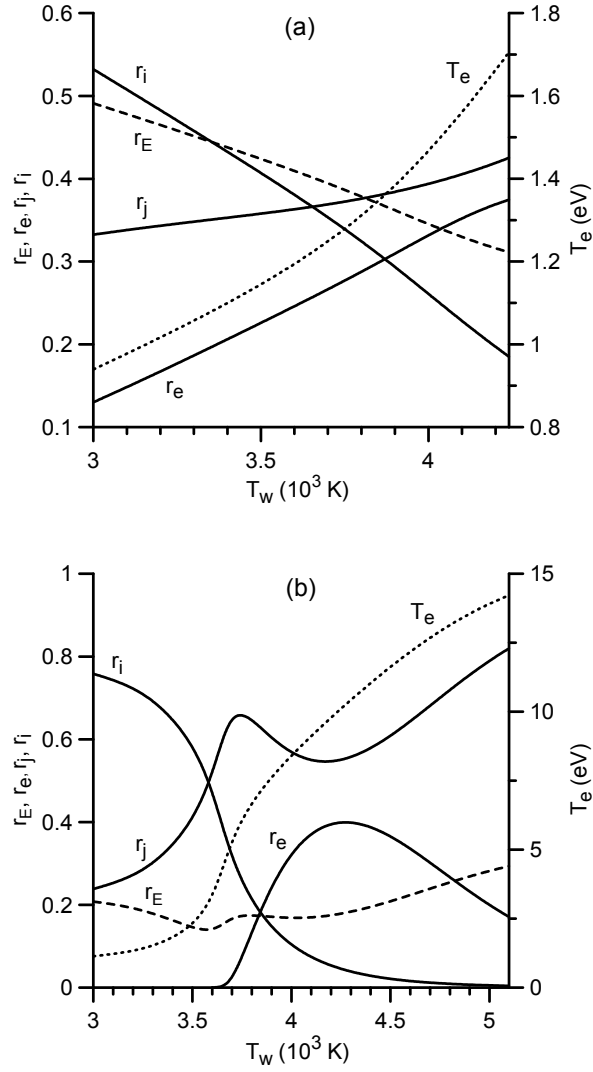


Figura 2.4: Parâmetros da camada de plasma junto ao cátodo em função da temperatura da superfície do cátodo.  $T_e$ : temperatura dos electrões na camada de plasma junto ao cátodo.  $r_E$ ,  $r_e$ ,  $r_j$ ,  $r_i$ : contribuições dos diferentes mecanismos que governam o balanço da energia dos electrões na camada de ionização. (a):  $U = 10$  V. (b):  $U = 50$  V.



dissertação mas sem a segunda modificação, isto é, efectuados com o modelo desta dissertação e tomando em consideração os iões positivos dupla e triplamente carregados tendo por base a assunção do equilíbrio de ionização descrito no modelo de Benilov e Marotta [49]. Podemos ver que o efeito da ausência dos iões positivos multiplamente carregados é pequeno para  $U \lesssim 12$  V, quando a temperatura dos electrões é baixa e a densidade dos iões positivos multiplamente carregados é desprezável [49]. Para altos valores de  $U$ , este efeito não é essencial para valores moderados de  $T_w$  correspondendo à secção crescente da função  $q_p$ ; para altos valores de  $T_w$  este efeito torna-se importante e resulta num decréscimo do fluxo de energia por um factor que pode atingir aproximadamente o valor 2.

No intervalo  $U \lesssim 20$  V, a dependência de  $q_p$  em relação a  $T_w$  para um valor fixo de  $U$  inclui duas secções, uma crescente e outra decrescente separadas por um máximo e são semelhantes ao calculado no modelo de Benilov e Marotta [49] neste intervalo. (Na verdade, gráficos semelhantes podem ser encontrados já no trabalho de Bade e Yos [26] com a diferença de que tais gráficos não são lisos no ponto de máximo.) Para altos valores de  $U$ , a dependência de  $q_p$  em relação a  $T_w$  muda: surge um patamar, o qual subsequentemente dá lugar a dois máximos e um mínimo. Para um valor fixo de  $T_w$ , um aumento de  $U$  leva a que a densidade de fluxo de energia tenha um aumento muito rápido quando o valor de  $U$  é baixo e um aumento consideravelmente mais lento quando o valor de  $U$  é elevado.

A razão para tal comportamento da função  $q_p$  é ilustrada pela figura 2.6, onde se apresenta as componentes do fluxo de energia. Por conveniencia, também estão presentes na figura 2.6 a densidade de fluxo de energia gerada pelo plasma, a temperatura dos electrões e o grau de ionização na fronteira exterior da camada de ionização. No caso de  $U = 10$  V (figura 2.6a), o balanço entre o aquecimento e o arrefecimento é bastante delicado: o fluxo de energia total é muito menor que os fluxos correspondentes ao aquecimento ou ao arrefecimento em todo o intervalo da temperatura da superfície do cátodo de interesse. Para baixos e moderados valores de  $T_w$ , o aquecimento devido aos iões excede substancialmente o aquecimento pelos electrões rápidos do plasma, contudo o último não pode ser desprezado uma vez que é comparável ou excede o fluxo total de energia.

Quando  $T_w$  é baixo, todas as componentes do fluxo de energia aumentam à medida que  $T_w$  aumenta, de uma forma aproximadamente proporcional a  $j_{em}$ ; a combinação dos aquecimentos devidos aos iões e aos electrões rápidos do plasma cresce mais rapidamente que o arrefecimento devido à emissão termiônica e, por conseguinte, aumenta o fluxo de energia total proveniente do plasma para a superfície do cátodo. À medida que  $T_w$  aumenta e o grau de ionização torna-se comparável à unidade (atingindo-se depois a ionização completa), o aumento da corrente iónica abrande; o aumento do ar-

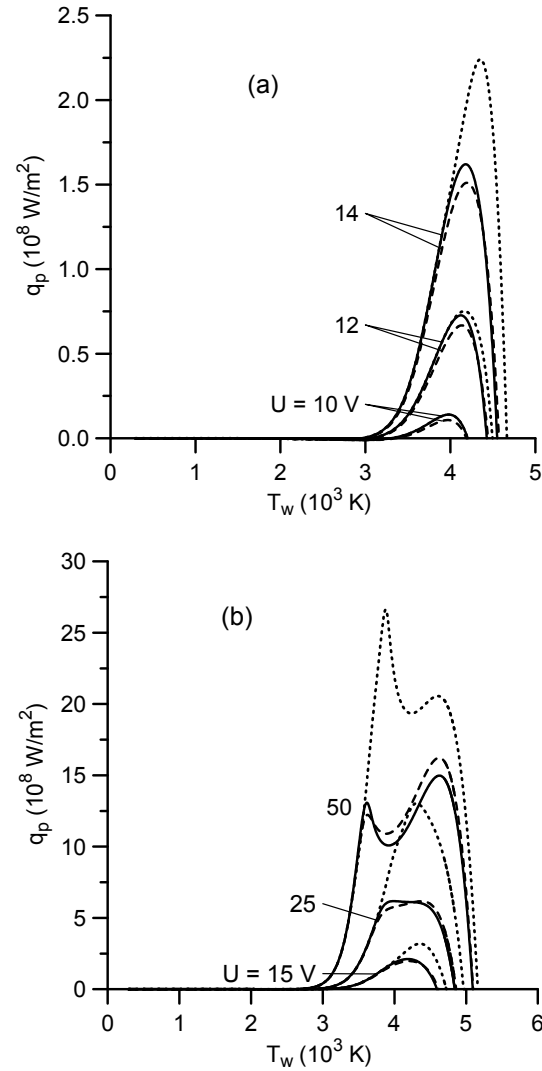


Figura 2.5: Densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo em função da temperatura da superfície do cátodo. Linhas a cheio: cálculos efectuados com base no modelo da presente dissertação. Linhas tracejadas: cálculos efectuados com base no modelo da presente dissertação sem as primeira e segunda modificações. Linhas ponteadas: cálculos efectuados com base no modelo da presente dissertação sem a segunda modificação.

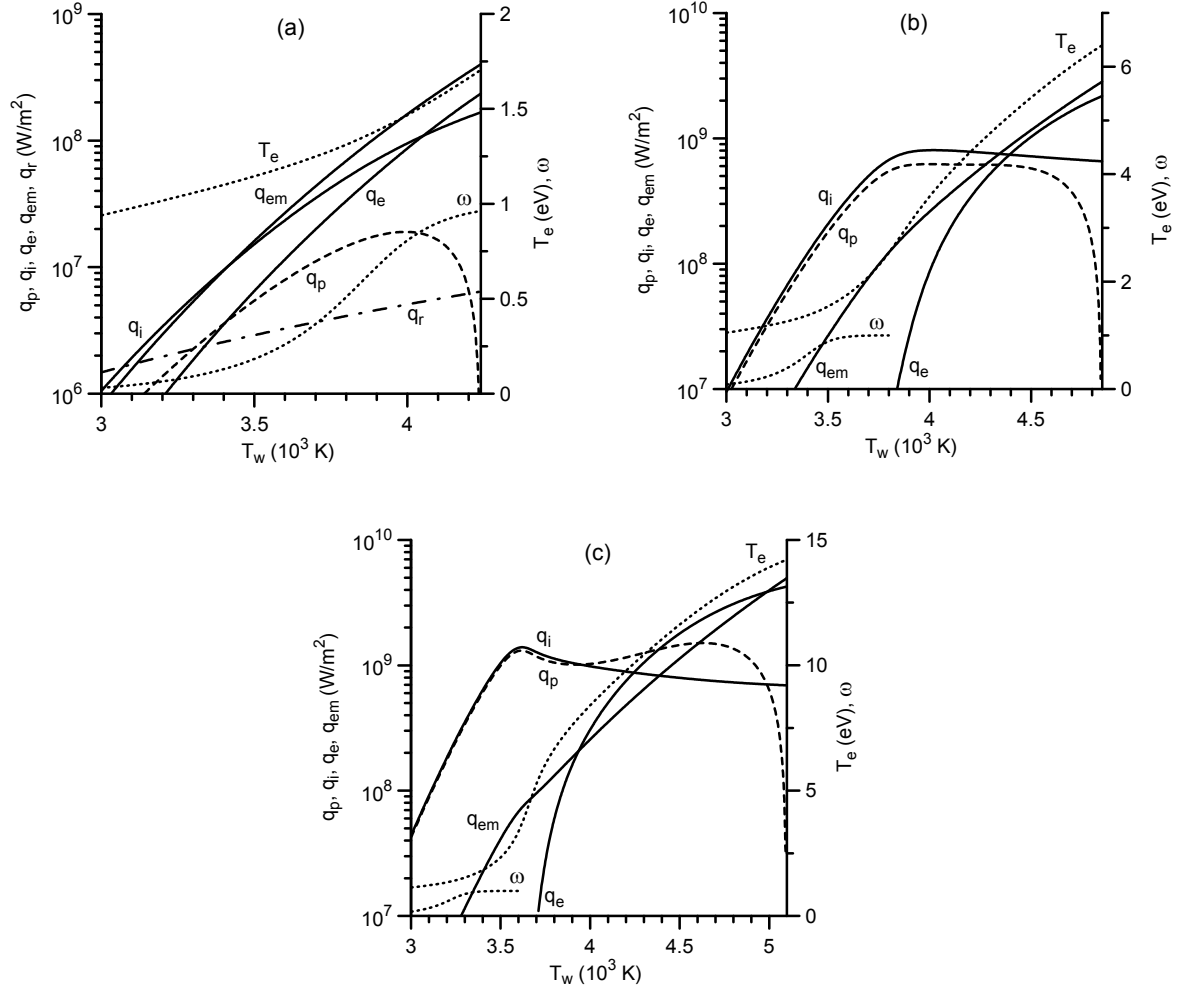


Figura 2.6: Densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo e suas componentes em função da temperatura da superfície do cátodo. (a):  $U = 10$  V (também estão representadas as perdas de energia por radiação), (b):  $U = 25$  V. (c):  $U = 50$  V.

refecimento devido à emissão termiônica sobrepõe-se à combinação dos aquecimentos devidos aos iões e aos electrões rápidos do plasma, começando então a diminuir o fluxo de energia total. Uma outra interpretação é sugerida pela equação (2.14): a temperatura dos electrões aumenta relativamente devagar no intervalo de baixos valores de  $T_w$ ; a quantidade  $U - (A + 3.2kT_e)/e$  não varia muito e  $q_p$  aumenta de uma forma aproximadamente proporcional a  $j$ . À medida que  $T_e$  aumenta, diminui a contribuição das perdas da energia dos electrões devido à ionização na camada de ionização e a taxa de aumento da temperatura dos electrões cresce; eventualmente o segundo termo no lado direito da equação (2.14) começa a crescer mais rapidamente que o primeiro termo e a dependência de  $q_p$  em relação a  $T_w$  torna-se decrescente.

Devemos realçar que em todo o intervalo de  $T_w$  considerado para  $U = 10$  V, o valor do parâmetro  $\alpha$  é grande (excede 7). Por esta razão, a não monotonia da dependência de  $q_p$  em relação a  $T_w$  para baixos valores da tensão pode ser entendida no âmbito da aproximação difusa e é causada pelo acima discutido abrandamento do aumento da corrente iónica, o qual ocorre quando o plasma torna-se fortemente e posteriormente completamente ionizado.

Nos casos de  $U = 25$  V e  $U = 50$  V (figuras 2.6b e 2.6c), para valores baixos e moderados de  $T_w$  o aquecimento devido aos iões excede substancialmente o arrefecimento devido à emissão termiônica e o aquecimento devido aos electrões rápidos do plasma. Por conseguinte, a densidade total do fluxo de energia é governada somente pelo aquecimento devido aos iões. No caso de  $U = 25$  V, para valores moderados de  $T_w$  o aquecimento devido aos iões fica quase saturado, podendo por isso ser identificado com o fluxo total de energia. Aumentando ainda mais o valor de  $T_w$ , o arrefecimento devido à emissão termiônica e o aquecimento devido aos electrões rápidos do plasma tornam-se significativos. Contudo, os respectivos fluxos de energia são praticamente compensados e uma vez que o aquecimento devido aos iões permanece próximo da saturação, o fluxo total de energia também permanece aproximadamente constante. Para  $T_w \gtrsim 4500$  K, o aumento do arrefecimento devido à emissão termiônica é superior ao aumento do aquecimento devido aos electrões rápidos do plasma e, por isso, o fluxo total de energia começa a decrescer.

No caso de  $U = 50$  V a física é semelhante excepto que o fluxo total de energia primeiro diminui para valores moderados de  $T_w$ , o que é devido a uma diminuição do aquecimento devido aos iões, aumentando depois, o que é devido a um aumento rápido do aquecimento devido aos electrões rápidos do plasma. Isto é uma explicação da existência de pontos de máximo da dependência de  $q_p$  em relação a  $T_w$  para altos valores da queda de tensão, o que pode ser visto na figura 2.5b. Devemos realçar que o primeiro ponto de máximo origina um desvio do valor do fluxo de iões para a superfície do cátodo relativamente ao valor previsto pela teoria da difusão e, por conseguinte,

não pode ser entendido no âmbito da aproximação difusa, em contraste com o valor máximo a baixas tensões.

Assim, encontramos três diferentes mecanismos que podem causar a não monotonia da dependência de  $q_p$  em relação a  $T_w$ : sobreposição do aumento da combinação dos aquecimentos devidos aos iões e aos electrões rápidos do plasma pelo aumento do arrefecimento devido à emissão termiônica; não monotonia da dependência da corrente iónica em relação à temperatura dos electrões, a qual é causada pelo desvio da corrente iónica relativamente ao valor previsto pela teoria da difusão; aumento rápido do aquecimento devido aos electrões rápidos do plasma, o qual é subsequentemente sobreposto pelo arrefecimento devido à emissão termiônica. Estes mecanismos são responsáveis, respectivamente, pelo máximo da dependência de  $q_p$  em relação a  $T_w$  a baixas tensões e pelo primeiro e segundo máximos a altas tensões. Devemos realçar que enquanto o primeiro mecanismo torna-se significativo à medida que o plasma aproxima-se da ionização completa, o segundo mecanismo torna-se significativo quando o plasma já está completamente ionizado, como acima foi indicado aquando da discussão da figura 2.3. Isto pode ser visto distintamente na figura 2.6a, por um lado, e na figura 2.6c, por outro.

Na figura 2.7 representa-se a dependência da densidade de fluxo de energia em relação a  $U$  para um valor fixo de  $T_w$ . Podemos ver que o aumento rápido de  $q_p$  para baixos valores de  $U$  é uma consequência de um aumento rápido do aquecimento devido aos iões, o qual, por sua vez, resulta de um aumento rápido da corrente iónica. Note-se que o grau de ionização nas condições da figura 2.7 excede 50% mesmo para baixos valores de  $U$ , enquanto  $\alpha$  para baixos valores de  $U$  é muito maior que a unidade. Por conseguinte, o aumento rápido da corrente iónica para baixos valores de  $U$  é devido principalmente à diminuição rápida do comprimento de ionização.

### **2.3 Perdas de energia pela parte da superfície do cátodo que contacta com o gás frio**

No segundo passo do procedimento descrito na secção 1.4, a função  $q_p$  dever ser extendida até  $T_w = T_c$  de modo a se poder descrever o fluxo de energia proveniente da parte da superfície do cátodo que está em contacto com o gás frio. Nesta dissertação, assume-se que este fluxo de energia é dominado pelas perdas de energia devido à radiação.

As perdas de energia devido à radiação  $q_r$  são calculadas pela fórmula  $q_r = \varepsilon \sigma_{SB} T_w^4$ , onde  $\varepsilon$  é a emissividade hemisférica total do material do cátodo e  $\sigma_{SB}$  a constante de Stefan-Boltzmann. Tendo em atenção a pesquisa bibliográfica efectuada por Dabring-

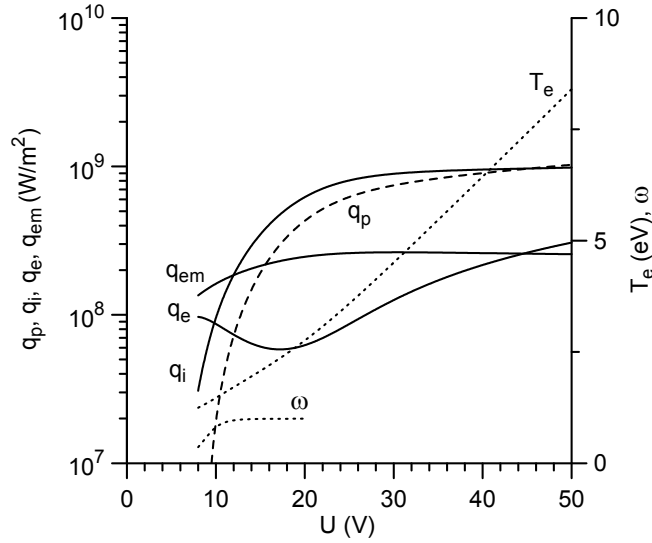


Figura 2.7: Densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo em função da queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo.  $T_w = 4000$  K.

hausen [70] relativamente a dados experimentais da emissividade do tungstênio, nesta dissertação a dependência da emissividade do tungstênio em relação à temperatura foi tirada do trabalho de Yih e Wang [71], à semelhança do que é feito no grupo de Mentel (ver, por exemplo, o trabalho de Dabringhausen *et al* [72]).  $\epsilon(T)$  é dado pelo seguinte polinómio do segundo grau

$$\epsilon(T) = -2.6858 \times 10^{-2} + 1.8197 \times 10^{-4} \frac{T}{K} - 2.1946 \times 10^{-8} \frac{T^2}{K^2}, \quad (2.22)$$

o qual é válido para valores da temperaturas compreendidos entre 400 K e 3600 K. As perdas de energia determinadas desta maneira estão apresentadas na figura 2.6a. Podemos ver que as perdas de energia devido à radiação não são substanciais na parte da superfície do cátodo colectora de corrente. Contudo, os cálculos efectuados para as condições experimentais, que serão consideradas abaixo, mostram que as perdas por radiação por parte da superfície lateral do cátodo, a qual está em contacto com o gás frio, são muito substanciais, especialmente se o cátodo for comprido.

A função  $q$  que descreve a densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a parte da superfície do cátodo que está em contacto com o arco de plasma e com o gás frio (isto é, as partes 1 e 2 da superfície do cátodo indicadas na figura 1.1) é obtida subtraindo  $q_r$  à densidade de fluxo de energia gerada pelo plasma,  $q_p$ :

$$q = q_p - q_r. \quad (2.23)$$

Note-se que a equação (2.23) não pode ser usada para valores de  $T_w$  abaixo de uma determinada temperatura. Tal facto deve-se ao surgimento de dificuldades em resolver as equações que descrevem a camada de plasma junto ao cátodo sob condições para as quais praticamente não existe plasma adjacente ao cátodo. Por conseguinte, a equação (2.23) foi usada nos cálculos para cátodos de tungsténio no intervalo de temperatura  $T_w \geq 2000$  K; no intervalo  $T_w < 2000$  K,  $q$  foi igualada a  $-q_r$ . Uma vez que  $q_p$  para  $T_w = 2000$  K varia entre  $47 \text{ W/m}^2$  para  $U = 10 \text{ V}$  e  $1.7 \times 10^3 \text{ W/m}^2$  para  $U = 50 \text{ V}$  enquanto as perdas de energia devido à radiação a esta temperatura são iguais a  $2.3 \times 10^5 \text{ W/m}^2$ , a descontinuidade da dependência de  $q$  em relação a  $T_w$ , determinada desta maneira, no ponto  $T_w = 2000$  K é desprezável. Devemos realçar que a exclusão do primeiro termo no lado direito da equação (2.23) no intervalo  $T_w < 2000$  K tem um significado puramente técnico. Por isso, a temperatura  $T_w = 2000$  K não deve ser identificada com a temperatura da superfície do cátodo na fronteira entre as regiões 1 e 2 na figura 1.1.

A função  $j$  é calculada através da abordagem descrita na secção 2.2.1 para  $T_w \geq 2000$  K e é igualada a zero para  $T_w < 2000$  K. Note-se que a densidade de corrente calculada para  $T_w = 2000$  K, através da abordagem descrita na secção 2.2.1, não excede  $4 \times 10^{-5} \text{ A/mm}^2$ . A superfície lateral dos cátodos nas condições experimentais, que serão considerados abaixo, não excede  $140 \text{ mm}^2$ . Por conseguinte, o erro cometido ao desprezarmos a densidade de corrente no intervalo  $T_w < 2000$  K não excede  $6 \text{ mA}$ , o que está bem abaixo da precisão das experiências.

Substituindo a equação (2.14) na equação (2.23) e integrando a relação obtida sobre a parte da superfície do cátodo que está em contacto com o arco de plasma e com o gás frio, obtemos

$$IU = Q_c + Q_r + \frac{I}{e} (A + 3.2kT_e^*), \quad (2.24)$$

onde

$$Q_c = \int q \, dS, \quad Q_r = \int q_r \, dS, \quad T_e^* = \frac{1}{I} \int j T_e \, dS, \quad (2.25)$$

sendo os integrais calculados ao longo da parte da superfície do cátodo que contacta com o arco de plasma e com o gás frio. Note-se que  $Q_c$  é a potência total removida por condução térmica da superfície para o corpo do cátodo e depois para o fluido de arrefecimento,  $Q_r$  é a potência total irradiada pela superfície do cátodo e  $T_e^*$  é a média pesada do valor da temperatura dos electrões. O significado físico da equação (2.24) é bastante claro: a potência eléctrica depositada na camada de plasma junto ao cátodo,  $IU$ , é igual à soma da potência transportada da camada para o cátodo e depois do cátodo para o seu ambiente,  $Q_c + Q_r$ , com a potência transportada da camada para o volume do plasma pela corrente devida aos electrões,  $I(A + 3.2kT_e^*)/e$ .

## 2.4 Resolução da equação da condução térmica no cátodo

Nesta dissertação, o problema não linear com condições de fronteira (1.6), (1.7) com a função  $q(T_w, U)$  descrita pela equação (2.23) foi resolvido para o caso de cátodos cilíndricos de secção recta circular com distribuições de temperatura axialmente simétricas. Nestas condições, podemos escrever a equação da condução térmica (1.6) na forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.26)$$

e a condição de fronteira (1.7) é dada por

$$\{r \leq R, z = 0\} : \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -q(\psi_w, U), \quad (2.27)$$

$$\{r = R, 0 \leq z \leq h\} : \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = q(\psi_w, U), \quad (2.28)$$

$$\{r \leq R, z = h\} : \quad \psi = 0. \quad (2.29)$$

$r$  e  $z$  são coordenadas cilíndricas com origem no centro da superfície frontal do cátodo e com o eixo dos  $z$ 's perpendicular à superfície e dirigido para o interior do cátodo conforme está ilustrado na figura 1.1 (com a diferença que a superfície frontal é plana e não semi-esférica). As superfícies frontal, lateral e de arrefecimento do cátodo são definidas, respectivamente, por  $\{r \leq R, z = 0\}$ ,  $\{r = R, 0 \leq z \leq h\}$  e  $\{r \leq R, z = h\}$ ;  $R$  e  $h$  representam o raio e a altura do cátodo, respectivamente.

A resolução numérica do problema não linear com condições de fronteira (2.26)-(2.29), nas condições acima referidas, foi feita utilizando uma abordagem iterativa. Em cada iteração, é resolvido o problema linearizado por meio de um esquema numérico de diferenças finitas. Na tentativa de resolução das equações em diferenças finitas em cada iteração, verificou-se que métodos iterativos tais como SOR (Sobre-Relaxação Sucessiva; ver, por exemplo o livro de Press *et al* [73]) não são robustos. Por outro lado, métodos rápidos tais como FFT, CR e FACR (Transformada de Fourier Rápida, Redução Cíclica e Combinação da Análise de Fourier com a Redução Cíclica) não são aplicáveis ao problema em questão uma vez que as variáveis não são separáveis; ver, por exemplo [73]. Por conseguinte, foi utilizado um método directo especial para resolver as equações da malha (ver o livro de Samarskii [74]), o qual representa uma variante matricial do método bem conhecido para resolver sistemas lineares tridiagonais (ver, por exemplo [75, 76]). Mais pormenores do método numérico são apresentados no apêndice A.

Os parâmetros de entrada para os cálculos são os seguintes: o gás que produz o plasma, a pressão do plasma, a condutividade térmica e a função de trabalho do material de que é feito o cátodo, a geometria do cátodo e a queda de tensão junto



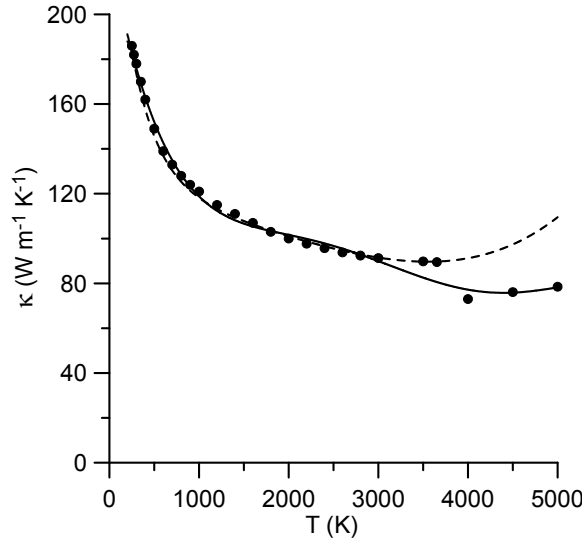


Figura 2.8: Dados recomendados da condutividade térmica do tungstênio e fórmulas de aproximação. •: dados recomendados [77]. Linha a cheio: aproximação de Benilov [78]. Linha tracejada: aproximação de Dabringhausen [70].

ao cátodo; todos os restantes parâmetros são determinados, incluindo a distribuição da temperatura no interior e na superfície do cátodo, a distribuição da densidade de corrente sobre a superfície do cátodo, a corrente de arco, a potência removida por condução de calor para o meio de arrefecimento e a potência irradiada pela superfície do cátodo. Resolvendo o problema para diferentes valores da queda de tensão junto ao cátodo, pode-se obter uma descrição completa da característica tensão-corrente da parte catódica da descarga.

A maioria dos cálculos efectuados nesta dissertação referem-se a cátodos de tungstênio. No livro de Touloukian *et al* [77] são apresentados dados da condutividade térmica  $\kappa$  do tungstênio num grande intervalo de temperatura; os valores da condutividade térmica para valores da temperatura pertencentes ao intervalo  $T \geq 3500$  K foram obtidos por extrapolação. Benilov [78] construiu, para o intervalo de temperature  $300 \text{ K} \leq T \leq 5000 \text{ K}$ , a seguinte aproximação polinomial destes dados:

$$\frac{\kappa(T)}{\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}} = \sum_{n=0}^5 A_n \left( \frac{T}{\text{K}} \right)^n, \quad (2.30)$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= 2.2917 \times 10^2 & A_1 &= -2.1845 \times 10^{-1} & A_2 &= 1.5259 \times 10^{-4} \\ A_3 &= -5.2374 \times 10^{-8} & A_4 &= 8.3727 \times 10^{-12} & A_5 &= -4.9908 \times 10^{-16} \end{aligned}$$

A dependência  $\kappa(T)$ , dada pela fórmula de aproximação (2.30), é apresentada na figura 2.8 juntamente com os dados originais retirados do livro de Touloukian *et al*

[77]. Esta fórmula de aproximação tem sido usado pelo grupo de Física dos Plasmas da Universidade da Madeira desde há alguns anos.

No recente artigo de revisão de White e Minges [79], os valores publicados por Hust e Lankford [80] são recomendados e é dada uma aproximação analítica destes valores. Infelizmente, esta aproximação dá resultados insensatos, possivelmente devido a erros tipográficos. Uma outra aproximação dos dados de Hust e Lankford [80] foi construída, no intervalo  $250 \text{ K} \leq T \leq 3695 \text{ K}$ , por Dabringhausen [70]:

$$\frac{\kappa(T)}{\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}} = \sum_{n=1}^6 A_n \left( \frac{T}{\text{K}} \right)^{n-3}, \quad (2.31)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= -4.7324 \times 10^6 & A_2 &= 4.9696 \times 10^4 & A_3 &= 5.1461 \times 10 \\ A_4 &= 3.4389 \times 10^{-2} & A_5 &= -1.4570 \times 10^{-5} & A_6 &= 1.9248 \times 10^{-9} \end{aligned} .$$

A dependência  $\kappa(T)$  dada pela fórmula de aproximação (2.31) está também representada na figura 2.8. Podemos ver que as aproximações (2.30) e (2.31) dão resultados muito semelhantes para valores da temperatura abaixo de 3000 K e divergem a altas temperaturas. Uma vez que a aproximação (2.30) está mais próxima dos dados recomendados para  $T \geq 4000 \text{ K}$ , não parece haver vantagem em adoptar a aproximação (2.31). Por conseguinte, nesta dissertação, a condutividade térmica do tungsténio é aproximada pela equação (2.30).

Em todos os cálculos efectuados nesta dissertação, a temperatura de arrefecimento  $T_c$  considerada foi 293 K.

## 2.5 Modelação do modo difuso num arco de baixa corrente

Os cálculos apresentados nesta secção referem-se à descarga difusa nas condições de experiências de baixa corrente de arco [81, 82, 83, 84, 85, 72, 86]. Os resultados da modelação numérica do modo difuso a altas correntes e dos modos mancha serão apresentados no capítulo 3 desta dissertação.

Nas figuras 2.9-2.18 são apresentadas os resultados da modelação numérica efectuada para o caso de um cátodo de tungsténio ou de tungsténio toriado a operar no modo difuso num plasma de argon à pressão 2.6 atm; nestas figuras  $R$  é o raio do cátodo e  $h$  a sua altura. Nesta dissertação, a temperatura de arrefecimento  $T_c$  foi igualada à temperatura ambiente,  $T_c = 293 \text{ K}$ . A condutividade térmica e a emissividade do tungsténio toriado foram consideradas iguais às do tungsténio puro. No caso do tungsténio toriado (0.7% de tório), os valores da função de trabalho e do factor

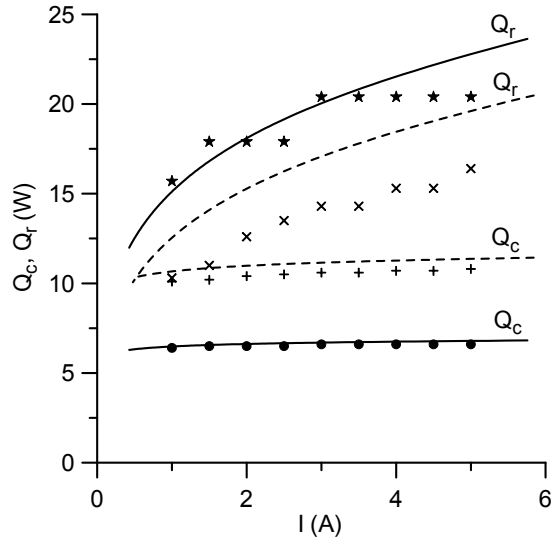


Figura 2.9: Potência removida por condução térmica para o fluido de arrefecimento e potência irradiada pela superfície do cátodo. Cátodo de tungstênio,  $R = 0.5$  mm. Linhas: modelação. Pontos: resultados experimentais [83].  $Q_c$ , ●, +: potência removida por condução térmica.  $Q_r$ , ★, ×: potência irradiada. Linhas a cheio, ●, ★:  $h = 30$  mm. Linhas tracejadas, +, ×:  $h = 20$  mm.

pré-exponencial na fórmula de Richardson-Schottky usados nos cálculos foram  $3.88$  eV e  $2.11 \times 10^5$  A/m<sup>2</sup> K<sup>2</sup>, respectivamente; estes valores foram obtidos por interpolação linear entre os valores para o tungstênio puro mencionados no final da secção 2.2.1 e os valores  $2.63$  eV e  $3.0 \times 10^4$  A/m<sup>2</sup> K<sup>2</sup> que são frequentemente utilizados (por exemplo, [87, 49]) para o tungstênio toriado com 2% de tório. Nos cálculos efectuados no caso de cátodos de tungstênio toriado, o primeiro termo do lado direito da equação (2.23) foi excluído no intervalo de temperatura  $T_w < 1700$  K; note-se que  $q_p$  para  $T_w = 1700$  K varia entre  $14$  W/m<sup>2</sup> para  $U = 10$  V e  $398$  W/m<sup>2</sup> para  $U = 50$  V e é muito menor que as perdas de energia por radiação, as quais são iguais a  $0.98 \times 10^5$  W/m<sup>2</sup>.

Na figura 2.9 apresenta-se a potência removida por condução térmica para o fluido de arrefecimento e a potência irradiada pela superfície de um cátodo de tungstênio. De acordo com a teoria e a experiência, as perdas de energia por radiação são mais significativas do que as perdas por condução térmica. Este resultado é, obviamente, uma consequência da razão  $R/h$  ter um pequeno valor para os cátodos considerados (cátodos muito finos). Um resultado interessante é que enquanto as perdas por radiação aumentam com um aumento da corrente, as perdas por condução térmica são aproximadamente constantes. À medida que  $h$  diminui, as perdas por condução térmica aumentam enquanto as perdas por radiação diminuem, como era de esperar. O acordo entre os resultados da modelação numérica e os resultados experimentais é

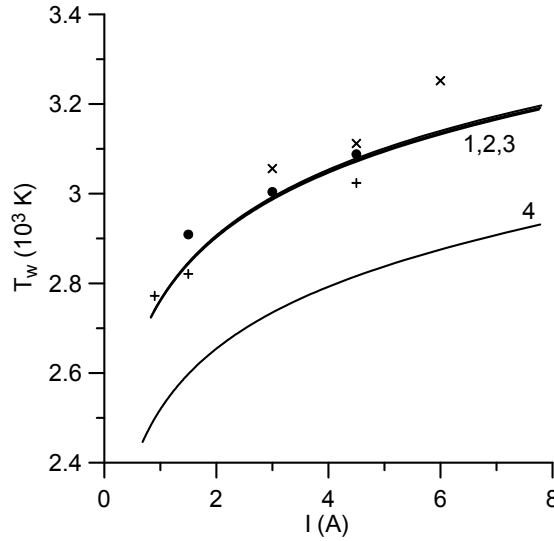


Figura 2.10: Temperatura no centro da superfície frontal do cátodo.  $R = 0.75$  mm. Linhas: modelação. Pontos: resultados experimentais [81]. 1, 2, 3,  $\times$ ,  $\bullet$ ,  $+$ : cátodo de tungstênio. 4: cátodo de tungstênio toriado. 1,  $\times$ :  $h = 29$  mm. 2, 4,  $\bullet$ :  $h = 24$  mm. 3,  $+$ :  $h = 19$  mm.

bom, especialmente no caso das perdas por condução térmica.

Na figura 2.10 podemos ver que a temperatura no centro da superfície frontal do cátodo aumenta suavemente à medida que aumenta a corrente. A temperatura é aproximadamente independente da altura do cátodo. Como era de esperar, a temperatura da superfície diminui à medida que diminui o valor da função de trabalho do material do cátodo. Outra vez, o acordo entre os resultados da modelação e a experiência é bom.

Algumas características tensão-corrente são apresentadas na figura 2.11 para cátodos de tungstênio e na figura 2.12 para um cátodo de tungstênio toriado. De acordo com a teoria e a experiência, as características tensão-corrente são decrescentes no intervalo de corrente considerado. Como era de esperar, uma diminuição do valor da função de trabalho do material de que é feito o cátodo origina uma diminuição da queda de tensão. Novamente, o acordo entre os resultados da modelação e a experiência é bom.

Os dados apresentados nas figuras 2.9-2.11 foram obtidos com base na assunção  $T_h = 4000$  K, bem como todos os dados apresentados nesta dissertação. Com o objectivo de verificar esta assunção, foram efectuados dois conjuntos de cálculos adicionais para as condições das figuras 2.9-2.11, um com  $T_h = T_w$  e outro com  $T_h = 10^4$  K. Ambos os conjuntos produziram resultados que coincidem, dentro da precisão gráfica,

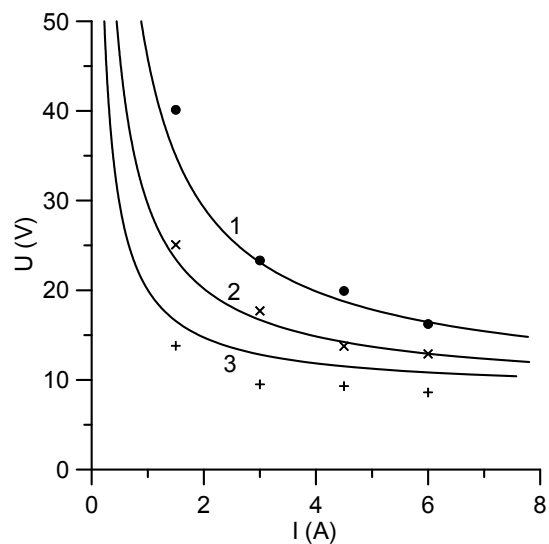


Figura 2.11: Características tensão-corrente de cátodos de tungstênio. Linhas: modelação. •: resultados experimentais [82]. ×, +: resultados experimentais [84]. 1, •:  $R = 0.75$  mm,  $h = 24$  mm. 2, ×:  $R = 0.5$  mm,  $h = 25$  mm. 3, +:  $R = 0.3$  mm,  $h = 15$  mm.

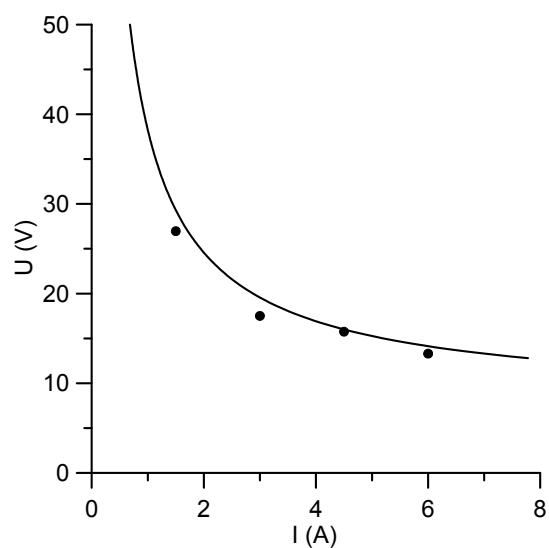


Figura 2.12: Característica tensão-corrente de um cátodo de tungstênio toriado. Linha: modelação. Pontos: resultados experimentais [82].  $R = 0.75$  mm,  $h = 24$  mm.

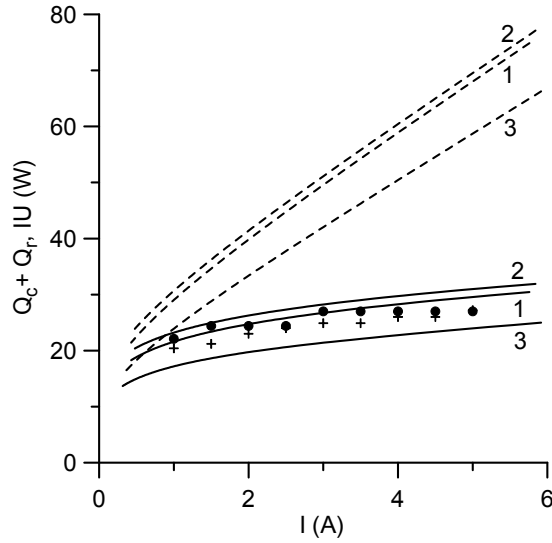


Figura 2.13: Balanço de potência da camada de plasma junto ao cátodo. Linhas: modelação. Pontos: resultados experimentais [83]. Linhas a cheio, pontos: potência transportada para o cátodo,  $Q_c + Q_r$ . Linhas tracejadas: potência introduzida na camada de plasma junto ao cátodo,  $IU$ .  $R = 0.5$  mm. 1, 2, pontos: cátodo de tungstênio. 3: cátodo de tungstênio toriado. 1, 3,  $\bullet$ :  $h = 30$  mm. 2,  $+$ :  $h = 20$  mm.

com os que foram obtidos com  $T_h = 4000$  K, de acordo com o que foi dito no final da secção 2.2.1.

Na figura 2.13 a potência transportada da camada de plasma junto ao cátodo para o cátodo,  $Q_c + Q_r$ , é comparada com a potência introduzida na camada,  $IU$ ; conforme a equação (2.24). Também são apresentados dados experimentais da potência transportada para o cátodo [83] (estes dados correspondem à soma das quantidades  $Q_c$  e  $Q_r$  mostradas na figura 2.9). Embora  $U$  diminua à medida que  $I$  aumenta, a potência introduzida na camada junto ao cátodo aumenta. A potência transportada para o cátodo também aumenta, o que é consistente com o acima mencionado aumento da temperatura do cátodo à medida que aumenta a corrente.

Podemos ver na figura 2.13 que para correntes muito baixas quase toda a potência fornecida à camada de plasma junto ao cátodo é transportada para o cátodo. À medida que a corrente aumenta, a fracção da potência transportada para o cátodo diminui consideravelmente, o que significa que a fracção da potência transportada pelos electrões para o volume do plasma aumenta consideravelmente. Tendo em mente que  $U$  diminui à medida que a corrente aumenta, devemos concluir que este resultado está relacionado com um outro resultado acima mencionado em ligação com a discussão da figura 2.6a: a baixas tensões, o fluxo líquido de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo é muito menor que o arrefecimento causado pela emissão

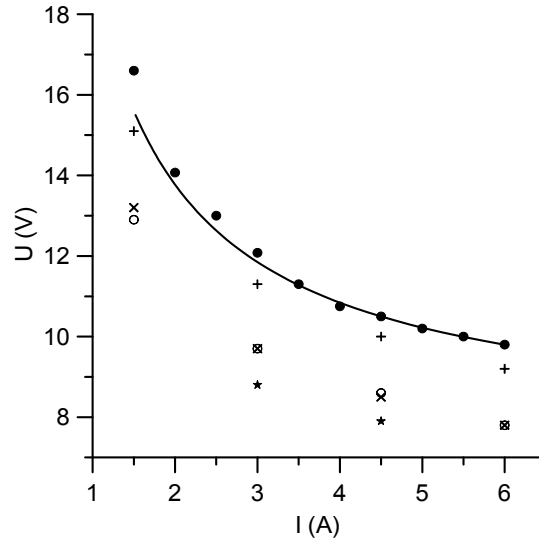


Figura 2.14: Características tensão-corrente de um cátodo de tungstênio a operar no modo difuso num plasma de xenon à pressão de 1 MPa.  $R = 0.3$  mm,  $h = 14$  mm. ●: dados experimentais [86]. Linha a cheio: resultado da modelação efectuada com base no modelo da presente dissertação. +: resultados do modelo de Schmitz e Riemann [88]. o: resultados do modelo de Flesch e Neiger [61]. x: resultados do modelo de Böttcher e Böttcher [37]. \*: resultados do modelo de Wendelstorf [54].

termiônica. Note-se que o facto de que a fracção da potência transportada pelos electrões para o volume do plasma ser variável e muito substancial impede, obviamente, a determinação da queda de tensão junto ao cátodo por meio de medidas calorimétricas.

A figura 2.14, retirada do trabalho de Nandelstädt *et al* [86], apresenta uma comparação dos resultados teóricos fornecidos por diferentes modelos (incluindo o da presente dissertação) com dados experimentais para o caso de um cátodo de tungstênio a operar no modo difuso num plasma de xenon. Segundo os próprios autores, os resultados obtidos no âmbito do modelo desenvolvido nesta dissertação estão em excelente acordo com os dados experimentais do grupo de Mentel.

Na figura 2.15, as linhas a cheio 1-3 ilustram o efeito que as modificações introduzidas no modelo de Benilov e Marotta [49] (ver secção 2.2.1), no âmbito desta dissertação, produzem nos cálculos numéricos. Podemos ver que, nas condições consideradas, a primeira modificação, isto é, a substituição da equação (2.6) pela equação (2.12), é a única que produz um efeito visível. Contudo, mesmo este efeito é pequeno. É óbvio que isto contribui para a credibilidade da modelação efectuada para as condições consideradas.

Na figura 2.15 também está presente o resultado da modelação efectuada para o caso quando a superfície lateral do cátodo é electricamente isolada. (Nestes cálculos,

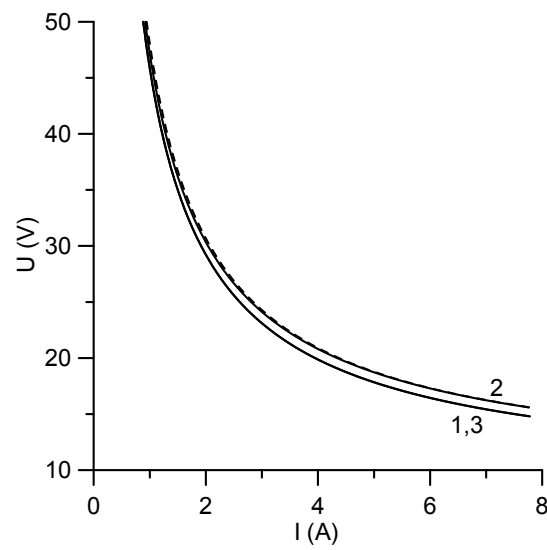


Figura 2.15: Características tensão-corrente de um cátodo de tungstênio.  $R = 0.75$  mm,  $h = 24$  mm. 1: cálculo efectuado com base no modelo da presente dissertação. 2: cálculo efectuado com base no modelo da presente dissertação sem a primeira modificação. 3: cálculo efectuado com base no modelo da presente dissertação sem as segunda e terceira modificações. Linha tracejada: cálculo efectuado com base no modelo da presente dissertação desprezando a transferência de corrente para a superfície lateral do cátodo.



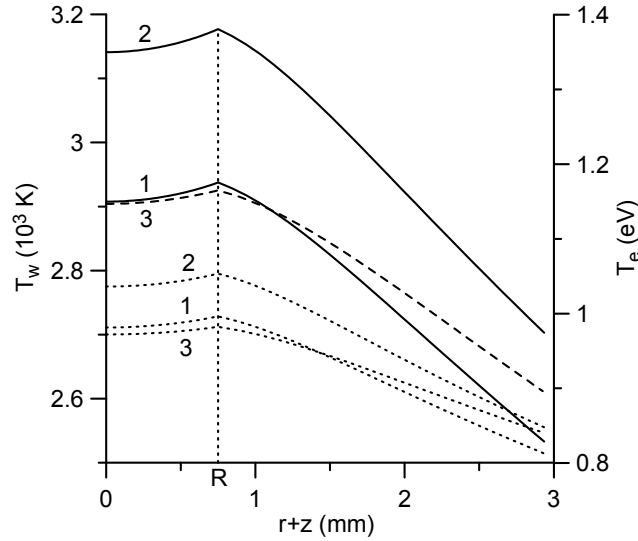


Figura 2.16: Distribuições da temperatura da superfície do cátodo e da temperatura dos electrões na camada de plasma junto ao cátodo ao longo da superfície de um cátodo de tungsténio. Linhas a cheio e linha tracejada: temperatura da superfície. Linhas ponteadas: temperatura dos electrões.  $R = 0.75$  mm. 1:  $I = 2$  A,  $h = 19$  mm. 2:  $I = 6$  A,  $h = 19$  mm. 3:  $I = 2$  A,  $h = 29$  mm.

a densidade de fluxo de energia na superfície lateral foi igualada a  $-q_r$  e a densidade de corrente eléctrica na superfície lateral foi igualada a zero.) Podemos ver que as características tensão-corrente das variantes com e sem corrente na superfície lateral são muito próximas. Contudo, as distribuições de corrente ao longo da superfície do cátodo são essencialmente diferentes: por exemplo, no caso com corrente na superfície lateral, a corrente colectada por esta superfície é 2.9 A para  $I = 4$  A.

Note-se que os balanços da potência do cátodo para estas duas variantes são também muito próximos: o total das perdas de potência  $Q_c + Q_r$  para  $I = 4$  A é 49.2 W com corrente na superfície lateral e 51.9 W sem corrente na superfície lateral. Além disso, as distribuições das perdas entre as perdas por condução térmica e por radiação são também muito semelhantes:  $Q_c$  e  $Q_r$  para  $I = 4$  A são, respectivamente, 20.7 W e 28.5 W com corrente na superfície lateral e 20.8 W e 31.1 W sem corrente na superfície lateral. Contudo, esta potência é fornecida pelo plasma de maneiras essencialmente diferentes: na variante com corrente na superfície lateral, a potência fornecida através da superfície lateral (a qual é obtida pela integração de  $q_p$  ao longo da superfície lateral) é 35.5 W.

Podemos concluir que, nas condições consideradas, as características do cátodo não são fortemente afectadas pelas distribuições da corrente e da potência sobre a superfície frontal do cátodo.

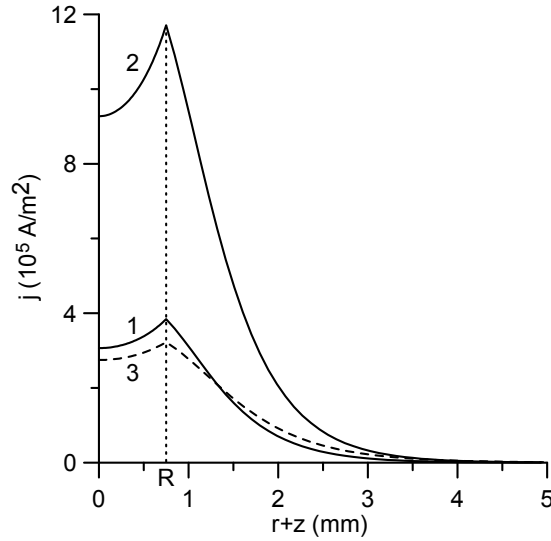


Figura 2.17: Distribuição da densidade de corrente ao longo da superfície de um cátodo de tungstênio.  $R = 0.75$  mm. 1:  $I = 2$  A,  $h = 19$  mm. 2:  $I = 6$  A,  $h = 19$  mm. 3:  $I = 2$  A,  $h = 29$  mm.

Nas figuras 2.16-2.18 podemos ver as distribuições de alguns parâmetros ao longo da superfície do cátodo. Nestas figuras,  $r$  e  $z$  são coordenadas cilíndricas com a origem no centro da superfície frontal do cátodo e com o eixo dos  $z$ 's perpendicular à superfície frontal e direccionado para o interior do cátodo. (Estas coordenadas estão ilustradas na figura 1.1 com a diferença que o topo do cátodo é plano e não semi-esférico como representado na figura 1.1.) De acordo com esta escolha, o domínio  $\{r \leq R, z = 0\}$  corresponde à superfície frontal enquanto  $\{r = R, z \geq 0\}$  corresponde à superfície lateral do cátodo. Por conseguinte, o intervalo  $0 \leq r + z \leq R$  nas figuras 2.16-2.18 corresponde à superfície frontal enquanto o intervalo  $r + z \geq R$  corresponde à superfície lateral.

Podemos ver na figura 2.16 que a distribuição da temperatura ao longo da superfície do cátodo é não monótona. Como era de esperar, o ponto mais quente do cátodo está posicionado na margem da superfície frontal, onde as condições para a remoção de calor por condução térmica são as piores. A variação da temperatura ao longo da superfície frontal do cátodo é muito pequena, a qual é outra vez uma consequência dos pequenos valores da razão  $R/h$  para os cátodos considerados. A variação da temperatura ao longo da superfície frontal do cátodo diminui à medida que aumenta o valor de  $h$ : para  $I = 2$  A, esta variação é igual a 29 K para  $h = 19$  mm e 21 K para  $h = 29$  mm. Um aumento do valor da corrente conduz a um aumento da temperatura da superfície do cátodo. As distribuições da temperatura ao longo da superfície frontal do cátodo

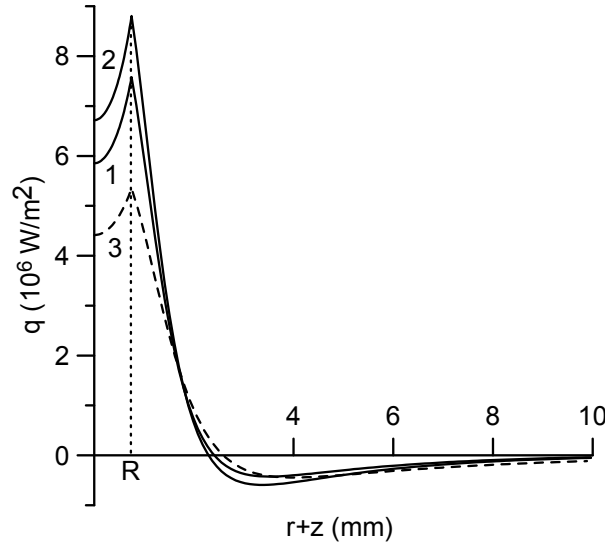


Figura 2.18: Distribuição da densidade de fluxo de energia ao longo da superfície de um cátodo de tungsténio.  $R = 0.75$  mm. 1:  $I = 2$  A,  $h = 19$  mm. 2:  $I = 6$  A,  $h = 19$  mm. 3:  $I = 2$  A,  $h = 29$  mm.

para diferentes valores de  $h$  e para o mesmo valor da corrente são muito próximas mas a temperatura é um pouco mais alta no caso de um cátodo curto. Note-se que este último efeito ocorre apenas se a superfície lateral do cátodo for colectora de corrente; ocorre o efeito inverso quando a superfície lateral é electricamente isolada.

A distribuição da temperatura dos electrões ao longo da superfície do cátodo é também não monótona, o que é uma consequência da acima mencionada não monotonia de  $T_w$ . Os valores da temperatura dos electrões são relativamente baixos, o que indica que, nas condições consideradas, todos os pontos da superfície do cátodo operam na secção crescente da dependência de  $q$  em relação  $T_w$ . Isto está em conformidade com o facto, acima mencionado, de que os resultados da modelação numérica, para as condições consideradas, não são apreciavelmente afectados pelas modificações introduzidas no modelo de Benilov e Marotta [49]. Na superfície frontal do cátodo,  $T_e$  diminui à medida que  $h$  aumenta. Isto é uma consequência do facto da queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo diminuir à medida que a altura do cátodo aumenta quando o valor da corrente é constante; é também uma consequência da acima mencionada pequena diminuição da temperatura da superfície frontal do cátodo quando aumenta o valor de  $h$ .

A distribuição da densidade de corrente eléctrica (ver figura 2.17) é também semelhante à distribuição da temperatura da superfície, excepto que a densidade de corrente, sendo (para  $U$  fixo) uma função forte de  $T_w$ , apresenta uma variação mais

notável ao longo da superfície frontal do cátodo e diminui mais rapidamente ao longo da superfície lateral. É interessante notar que a área total da superfície do cátodo colectora de corrente é essencialmente a mesma para todas as três variantes.

A distribuição da densidade de fluxo de energia (ver figura 2.18) é quantitativamente semelhante à distribuição da densidade de corrente eléctrica, excepto que a densidade de fluxo de energia torna-se negativa para  $z \gtrsim 2$  mm.

## **2.6 Conclusões**

Foram introduzidas três modificações no modelo da camada de plasma junto ao cátodo desenvolvido por Benilov e Marota [49]: foi alterada a fórmula para a densidade de fluxo de iões, o que equivale a introduzir a equação (2.14) como uma expressão para a densidade de fluxo de energia gerada pelo plasma e recebida pela superfície do cátodo; a possível presença de iões positivos multiplamente carregados foi excluída uma vez que é de pouca importância a contribuição destes iões para a corrente iónica total recebida pela superfície do cátodo; foi alterada a descrição da dependência do fluxo de iões para a superfície do cátodo em relação ao parâmetro  $\alpha$ , o qual pode ser interpretado como a razão entre o comprimento de ionização e o livre percurso médio para as colisões ião-átomo. O efeito produzido pelas primeira e terceira modificações não é substancial. O efeito da ausência de iões multiplamente carregados é essencial para valores moderados e valores altos de  $U$  e para altos valores de  $T_w$  e resulta numa diminuição do fluxo de energia por um factor que pode atingir aproximadamente o valor 2.

A equação (2.14) representa uma forma particular da equação da conservação da energia na camada de plasma junto ao cátodo. É óbvio que esta equação tem de ser assegurada, numa forma apropriada, para qualquer modelo da camada de plasma junto ao cátodo. Algumas ou outras variantes da forma integral desta equação, equação (2.24), são muito bem conhecidas dos experimentalistas e têm servido de base para muitas tentativas de deduzir a queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo a partir de medições calorimétricas. Infelizmente, para a maioria dos modelos teóricos da camada de plasma junto ao cátodo a questão da conformidade com a equação da conservação da energia não é considerada e parece mesmo que esta equação não é satisfeita. Não é claro quais as consequências que esta inconsistência pode causar em tais modelos.

Foi obtida uma descrição fechada da interacção plasma-cátodo através da resolução numérica do problema não linear com condições de fronteira para a distribuição da temperatura no interior do corpo do cátodo. Neste capítulo, foram apresentados resultados da modelação numérica da descarga difusa nas condições de funcionamento de um modelo experimental de lâmpada HID concebido pelo grupo de Mentel em

Bochum. As potências removidas por condução térmica para o fluido de arrefecimento e irradiada pela superfície do cátodo, a temperatura da superfície do cátodo e a queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo foram calculadas como funções da corrente de arco e estão em bom acordo com os dados experimentais. Foi encontrado, em particular, que a fracção da potência transportada pelos electrões para o volume do plasma, quando comparada com a potência total fornecida à camada de plasma junto ao cátodo, varia e pode ser muito considerável, o que, obviamente, impede a determinação da queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo por meio de medições calorimétricas. Nas condições consideradas, as características integrais do cátodo não são fortemente afectadas pela distribuição de corrente e de potência ao longo da superfície frontal do cátodo.

No próximo capítulo serão apresentados e discutidos resultados das modelações numéricas respeitantes ao modo difuso a altas correntes e a diferentes modos mancha.

## Capítulo 3

# Modo difuso num grande intervalo de corrente e modos mancha axialmente simétricos

*Manchas solitárias num cátodo plano infinito e modos difuso e mancha axialmente simétricos em cátodos finitos de descargas de arco de alta pressão são estudados num extenso intervalo de corrente. São analisados aspectos gerais e apresentados resultados numéricos referentes a cátodos de tungsténio planos e de forma cilíndrica a operar num plasma de argon à pressão atmosférica para correntes de arco até 100 kA. É mostrado, em particular, que a temperatura da superfície do cátodo no interior de uma mancha solitária varia relativamente pouco, podendo ser estimada com uma precisão de cerca de 200 – 300 K sem ser necessário resolver a equação da condução térmica no corpo do cátodo. O comportamento assintótico das soluções para um cátodo finito no caso limite de altas correntes é encontrado e confirmado pelos resultados numéricos. É confirmado um padrão geral das características tensão-corrente de vários modos de transferência de corrente em cátodos finitos sugerido previamente com base numa análise de bifurcações. É estudada a transição de modos mancha num cátodo finito no limite de cátodos de grandes dimensões para o modo mancha solitária num cátodo plano infinito. É estabelecido que o modo mancha solitária representa uma forma limite do modo mancha de alta tensão num cátodo finito. É considerada a questão da distinção entre modo difuso e modo mancha num cátodo finito.*

### 3.1 Introdução

Uma revisão sobre trabalhos relacionados com a modelação de diferentes modos (difuso e mancha) da transferência de corrente para um cátodo foi apresentada na introdução

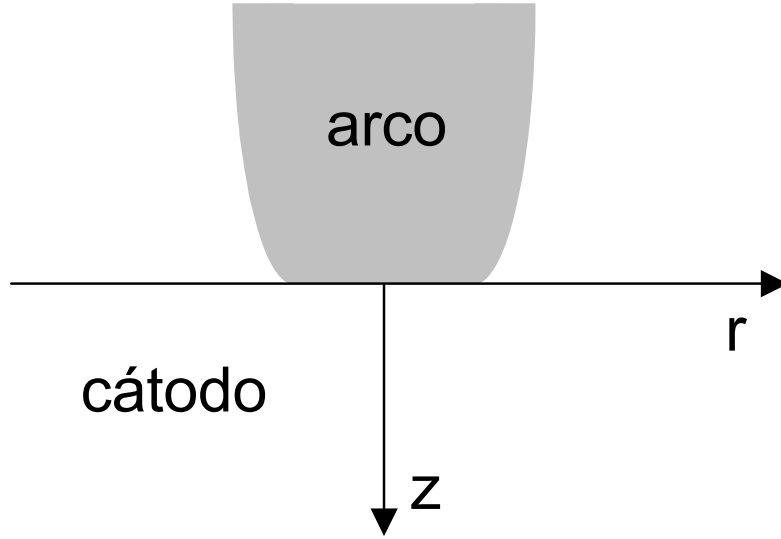


Figura 3.1: Esquema do modelo da mancha solitária.

desta dissertação. Aqui, vamos apenas mencionar algumas questões que continuam por resolver. Assim, por exemplo, o padrão das características tensão-corrente correspondente a diferentes modos de transferência de corrente proposto por Benilov [35], com base numa análise qualitativa assente numa teoria de bifurcações, parece não ser confirmado pelas modelações numéricas realizadas por Moizhes e Nemchinsky [30] e por Böttcher e Böttcher [37]. Em particular, no trabalho de Böttcher e Böttcher [37] não foram encontrados pontos de bifurcação; um dos modos mancha termina num ponto denominado ponto crítico em vez de voltar para trás ou se juntar a outra solução, o que não é um comportamento típico de múltiplas soluções e, portanto, não se enquadra no padrão proposto por Benilov [35]. Outras questões menos claras, também analisadas no presente capítulo, são as que estão relacionadas com as propriedades da mancha solitária, com a transição deste modo para o modo mancha num cátodo finito e ainda com as definições mais apropriadas para os modos difuso e mancha.

## 3.2 Mancha solitária

Vamos considerar uma mancha solitária axialmente simétrica num cátodo plano infinito. Esperamos que este modo represente a forma limite de um dos modos mancha num cátodo finito; esta transição limite será estudada na Secção 3.3.2.

### 3.2.1 O modelo

A equação da condução térmica (2.26) deve ser resolvida no espaço semi-infinito  $z \geq 0$  (o corpo do cátodo) com as condições de fronteira

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -q(T_w, U) \quad (3.1)$$

na superfície do cátodo,  $z = 0$ , e

$$\psi \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

no interior do cátodo, longe da mancha,  $\{r + z \rightarrow \infty, z \geq 0\}$ .

A função  $q$  que foi discutida em pormenor no capítulo anterior deve satisfazer certas condições de modo a que uma mancha solitária possa existir. Primeiramente, ela deve anular-se para  $T_w = T_c$ :  $q(T_c, U) = 0$ . Esta condição surge da imposição de que não existe fluxo de energia proveniente de zonas situadas longe da mancha solitária ou, alternativamente, da imposição de que o problema (2.26), (3.1), (3.2) tem, para além duma solução não trivial que descreve a mancha, também a solução trivial  $T \equiv T_c$  que descreve a situação quando não existe mancha no ponto considerado. Além disso, a função  $q$  deve anular-se suficientemente rápido para  $T_w \rightarrow T_c$ . De facto, se a mancha é solitária, a potência total removida da mancha por condução térmica é dada pelo integral impróprio

$$Q_c = 2\pi \int_0^\infty q[T_w(r), U] r dr. \quad (3.3)$$

A grandes distâncias da mancha solitária, a diferença  $(T_w - T_c)$  tende para zero proporcionalmente a  $1/r$ . Assumindo que  $q \approx C_1 (T_w - T_c)^n$  para  $T_w \rightarrow T_c$  ( $C_1$  e  $n > 0$  são quantidades dadas), encontramos que  $q[T_w(r), U]$  tende para zero proporcionalmente a  $1/r^n$  e o integral (3.3) converge, significando que  $n > 2$ . O sentido físico desta condição é bastante claro: a densidade de fluxo de energia deve anular-se suficientemente rápido longe da mancha, senão uma perturbação criada pela mancha não será localizada.

As condições acima mencionadas não são formalmente satisfeitas pela função  $q$  descrita no capítulo 2 devido às perdas por radiação (a não ser que  $T_c = 0$ ). Por conseguinte, no cálculo de uma mancha solitária as perdas por radiação no modelo da função  $q$ , descrito no capítulo 2, são consideradas zero para  $T_w < T_{co}$ , onde  $T_{co}$  é uma determinada temperatura mais elevada que  $T_c$ .

O tempo de computação pode ser drasticamente reduzido se o problema não linear com condições de fronteira (2.26), (3.1), (3.2) (que é bidimensional) for transformado numa equação integral unidimensional para a temperatura da superfície do cátodo, tal como foi feito por Moizhes e Nemchinsky [29] e Benilov [32]. Contudo, neste trabalho tal transformação não é utilizada sendo o problema bidimensional resolvido pela abordagem iterativa descrita no capítulo 2.



A fronteira que separa o domínio de cálculo do resto da superfície do cátodo deve ser escolhida suficientemente longe da origem da mancha para que a solução seja independente da posição exacta dessa fronteira. Um caminho simples para formular uma condição de fronteira nesta fronteira consiste em deslocar a equação (3.2) do infinito para a fronteira, isto é, pôr  $\psi = 0$ . Contudo, é aconselhável usar outra condição de fronteira a qual permita excluir dos cálculos a região posicionada muito longe da mancha onde a solução tenha já atingido o seu comportamento assintótico ainda que permaneça não nula. Tal condição de fronteira pode ser derivada como se segue. O comportamento assintótico de uma solução a uma distância grande da mancha pode ser escrito, em primeira aproximação, na forma

$$\psi = \frac{C_2}{\rho}, \quad (3.4)$$

onde  $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$  é a distância a partir do centro da mancha e  $C_2$  é uma constante. Facilmente se demonstra que a expressão de  $\psi$  dada pela equação (3.4) satisfaz a relação

$$r \frac{\partial \psi}{\partial r} + z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi = 0, \quad (3.5)$$

que pode servir de condição de fronteira a grandes distâncias  $r+z$  do centro da mancha.

Na modelação numérica da mancha solitária foi usada a condição de fronteira (3.5). Nesta modelação foram desprezadas as contribuições da potência removida por condução térmica, da potência perdida por radiação e da corrente colectada pelo cátodo na parte da superfície do cátodo situada fora do domínio de cálculo.

### **3.2.2 Aspectos gerais: limite superior da temperatura do cátodo e limite inferior da temperatura no interior de manchas solitárias de baixa tensão**

Algumas considerações qualitativas sobre uma mancha num cátodo semi-infinito foram estabelecidas por Bade e Yos [26] e Benilov [89]. Nesta secção, tais considerações são consideradas em conjunto e analisadas com o objectivo de apresentar um quadro o mais completo e geral possível.

A dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  para  $U$  fixo, calculada com base no modelo apresentado no capítulo 2, é apresentada na figura 3.2 para dois valores da queda de tensão. (Todos os cálculos numéricos respeitantes ao presente capítulo referem-se, excepto nos casos explicitamente mencionados, a um plasma de argon à pressão atmosférica e a um cátodo cujo material é o tungsténio; os restantes parâmetros são os mesmos que foram descritos no capítulo 2.) As principais características desta dependência são as seguintes. A função  $q$  é negativa para baixos valores de  $T_w$ , quando

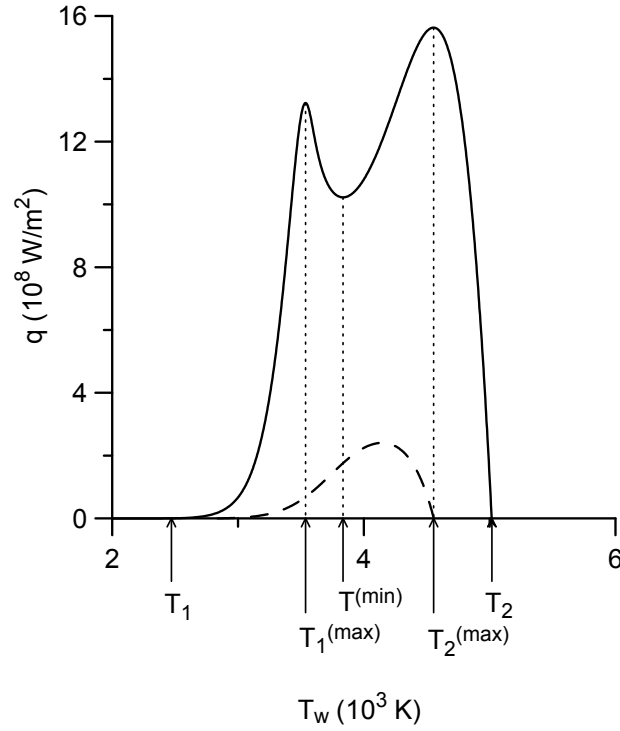


Figura 3.2: Dependência de  $q$  em relação  $T_w$  para um plasma de argon à pressão atmosférica e um cátodo de tungsténio. Linha a cheio:  $U = 50$  V. Linha tracejada:  $U = 15$  V.

o arrefecimento da superfície do cátodo por radiação prevalece sobre o seu aquecimento por parte do plasma. Para altos valores de  $T_w$ ,  $q$  torna-se positiva, atingindo um máximo (para baixos valores de  $U$ ) ou então um máximo seguido de um mínimo e um outro máximo (para altos valores de  $U$ ). Uma vez atingidos altos valores de  $T_w$ , o arrefecimento termiónico excede o aquecimento resultante da acção combinada do bombardeamento da superfície do cátodo pelos iões e pelos electrões provenientes do plasma, tornando-se  $q$  outra vez negativa. Vamos designar os valores de temperatura para os quais  $q$  muda de sinal por  $T_1$  e  $T_2$ , sendo  $T_1 < T_2$ . No caso de altas tensões, quando a dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  tem dois máximos, os valores de temperatura correspondentes aos máximos serão designados por  $T_1^{(\max)}$  e  $T_2^{(\max)}$  e o valor de temperatura correspondente ao mínimo será designado por  $T^{(\min)}$ , sendo  $T_1 < T_1^{(\max)} < T^{(\min)} < T_2^{(\max)} < T_2$ . No caso de baixas tensões, quando a dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  tem apenas um máximo, a respectiva temperatura será designada por  $T_2^{(\max)}$ .

É óbvio que todos os valores de temperatura acima introduzidas dependem de  $U$ . Contudo, esta dependência não é muito forte, pelo menos no caso das temperaturas

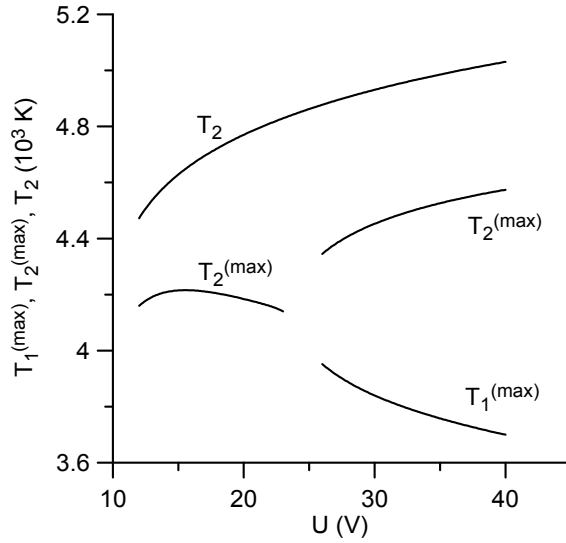


Figura 3.3: Pontos característicos da dependência de  $q$  em relação a  $T_w$ . Plasma de argon à pressão atmosférica e cátodo de tungsténio.

$T_2^{(max)}$  e  $T_2$ , as quais são as mais relevantes para a análise que se segue. Na figura 3.3 é apresentado um exemplo das funções  $T_1^{(max)}(U)$ ,  $T_2^{(max)}(U)$ , e  $T_2(U)$ . De facto, podemos ver que  $T_2$  e  $T_2^{(max)}$  não mudam muito relativamente a  $U$ . É de notar a existência de um intervalo estreito de  $U$  perto de 25 V no qual a dependência de  $q$  relativamente a  $T_w$  tem um patamar; este intervalo está situado entre os baixos valores de  $U$  nos quais a dependência tem um máximo e os altos valores de  $U$  nos quais a dependência tem dois máximos. Virtualmente não podemos falar de máximos neste intervalo. Por isso, na figura 3.3, as quantidades  $T_1^{(max)}(U)$  e  $T_2^{(max)}(U)$  não são apresentadas neste intervalo.

As considerações qualitativas apresentadas por Bade e Yos [26] relativamente a uma mancha num cátodo semi-infinito foram estabelecidas para o caso em que a dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  tem um máximo. Foi indicado que, uma vez surgida a mancha, uma situação estável deve ser alcançada com a temperatura da mancha situada entre o valor de  $T_w$  para o qual  $q$  atinge o máximo e o valor de  $T_w$  para o qual  $q$  torna-se negativa (ou, em termos das temperaturas acima referidas, algures entre  $T_2^{(max)}$  e  $T_2$ ). Esta assunção foi confirmada pelos resultados dos cálculos numéricos efectuados por Benilov [32], os quais mostraram que a temperatura no interior duma mancha num cátodo semi-infinito no caso quando a dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  tem um máximo varia desde  $T_2^{(max)}$  na margem da mancha até a um valor maior no centro da mancha, sendo este último valor menor que  $T_2$ .

Assim, podemos obter uma estimativa da temperatura no interior de uma man-

cha num cátodo extenso a baixas tensões através da análise da solução do problema na parte do plasma: é suficiente calcular a função  $q(T_w, U)$  e determinar os valores  $T_2^{(\max)} = T_2^{(\max)}(U)$  e  $T_2 = T_2(U)$  nos quais  $q$  como função de  $T_w$  para um dado valor de  $U$  atinge o valor máximo e se torna negativa, respectivamente. É de realçar que não há necessidade de resolver a equação da condução térmica no corpo do cátodo para se fazer tal estimativa.

A conclusão de que a temperatura numa mancha num cátodo semi-infinito, no caso em que a dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  tem um único máximo, varia entre  $T_2^{(\max)}$  e  $T_2$ , tem obviamente uma aplicabilidade limitada. Em particular, ela aplica-se somente a manchas bem desenvolvidas no sentido de que, por exemplo, o ponto mais quente de um cátodo finito a operar no modo difuso deve facilmente ter uma temperatura abaixo do valor  $T_2^{(\max)}$ ; alguns exemplos estão presentes no capítulo 2. Por outro lado, o limite superior da temperatura da superfície do cátodo acima estabelecido é bastante geral: podemos afirmar que a temperatura do ponto mais quente de um cátodo sem aquecimento de Joule apreciável é sempre inferior ao valor  $T_2$ .

A última afirmação pode ser provada como se segue [89]. O potencial de fluxo de calor, sendo uma solução da equação de Laplace, é uma função harmónica das coordenadas espaciais. Consideremos um ponto do cátodo no qual esta função atinge o seu valor máximo. De acordo com o princípio de máximo para funções harmónicas (ver por exemplo, [90]), este ponto está posicionado na superfície do cátodo e não no seu interior. Uma vez que o ponto considerado é um ponto de máximo da função  $\psi$ , a derivada  $\partial\psi/\partial n$  não pode ser negativa neste ponto ( $n$  representa uma direcção localmente ortogonal à superfície do cátodo e direccionada para fora do mesmo). Uma vez que  $\partial\psi/\partial n = q$  ao longo da superfície do cátodo, a função  $q$  é positiva neste ponto, o que significa que o valor local da função  $\psi$  não excede  $\psi_2$  [valor dado pela equação (1.5) para  $T = T_2$ ]. Por conseguinte, o valor máximo da função  $\psi$  não pode exceder  $\psi_2$ . Assim, podemos afirmar que a temperatura não excede  $T_2$  em qualquer ponto do cátodo.

O significado físico desta conclusão é bastante claro: valores de temperatura excedendo  $T_2$  não podem ser mantidos pelo fluxo de energia proveniente do plasma (o qual é negativo para  $T > T_2$ ), nem pelo fluxo de calor proveniente dos pontos adjacentes do corpo do cátodo (este fluxo pode ser originado apenas pelos pontos da superfície onde o fluxo de energia proveniente do plasma é positivo, contudo o calor não se pode propagar destes pontos para um ponto mais quente).

Devemos realçar que a conclusão de que a temperatura do cátodo não pode exceder  $T_2$  aplica-se a qualquer modelo da interacção plasma-cátodo no qual o fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo é governado pelo valor local da temperatura da superfície e pela queda de tensão junto ao cátodo, a qual é constante

ao longo da superfície onde a corrente é colectada, e ainda no qual é desprezado o aquecimento de Joule no interior do corpo do cátodo. Em particular, esta conclusão aplica-se independentemente do número de máximos da dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  para  $U$  fixo. Esta conclusão aplica-se também a cátodos com qualquer forma operando em qualquer um dos diferentes modos de transferência de corrente.

Esta conclusão permite-nos estimar rapidamente o limite superior da temperatura do ponto mais quente de um cátodo refractário. Por exemplo, usando os dados de  $T_2$  apresentados na figura 3.3, podemos dizer que a temperatura do ponto mais quente de um cátodo de tungsténio num plasma de argon à pressão atmosférica para qualquer valor da corrente de arco e em qualquer modo de transferência de corrente não dever exceder aproximadamente 4500 – 5000 K.

### 3.2.3 Resultados da modelação numérica

Os cálculos apresentados nesta secção foram realizados no intervalo de valores da queda de tensão junto ao cátodo compreendido entre 40 V e 11.8 V, o qual corresponde ao intervalo de corrente com um valor máximo de aproximadamente 100 kA. Estes cálculos foram realizados com  $T_c = 293$  K e  $T_{co} = 500$  K. O domínio de cálculo utilizado na modelação numérica foi  $\{r, z \leq 5 \text{ mm}\}$  no intervalo  $40 \text{ V} \geq U \geq 30 \text{ V}$ ,  $\{r, z \leq 10 \text{ mm}\}$  no intervalo  $30 \text{ V} \geq U \geq 20 \text{ V}$ ,  $\{r, z \leq 20 \text{ mm}\}$  no intervalo  $20 \text{ V} \geq U \geq 15 \text{ V}$ ,  $\{r, z \leq 40 \text{ mm}\}$  no intervalo  $15 \text{ V} \geq U \geq 13 \text{ V}$  e  $\{r, z \leq 80 \text{ mm}\}$  no intervalo  $13 \text{ V} \geq U \geq 11.8 \text{ V}$ . A modelação numérica foi efectuada usando uma rede não uniforme. No apêndice A são apresentados alguns detalhes relacionados com a metodologia seguida para resolver numericamente o problema (2.26), (3.1), (3.2).

Na figura 3.4 é apresentada a característica tensão-corrente de uma mancha solitária. Podemos ver que esta característica é decrescente: a queda de tensão junto ao cátodo é bastante elevada para pequenos valores da corrente e decresce suavemente à medida que o valor da corrente aumenta. Para verificar a boa qualidade dos resultados da modelação numérica, foram feitas duas variantes: numa dessas variantes o domínio de cálculo foi duplicado, na outra foi considerado  $T_{co} = 1000$  K. Em ambos os casos, a característica tensão-corrente não sofreu alteração, pelo menos dentro da precisão gráfica.

A figura 3.4 mostra também a potência  $Q_c$  removida pela condução térmica, a potência  $Q_r$  irradiada e a potência introduzida na camada de plasma junto ao cátodo,  $IU$ . Podemos ver que a potência total transportada para o cátodo,  $Q_c + Q_r$ , é muito menor que a potência depositada na camada junto ao cátodo, o que significa que a maior parte da potência depositada é transportada pelos electrões para o volume do plasma. Esta situação contrasta com os cálculos efectuados para o modo difuso, no

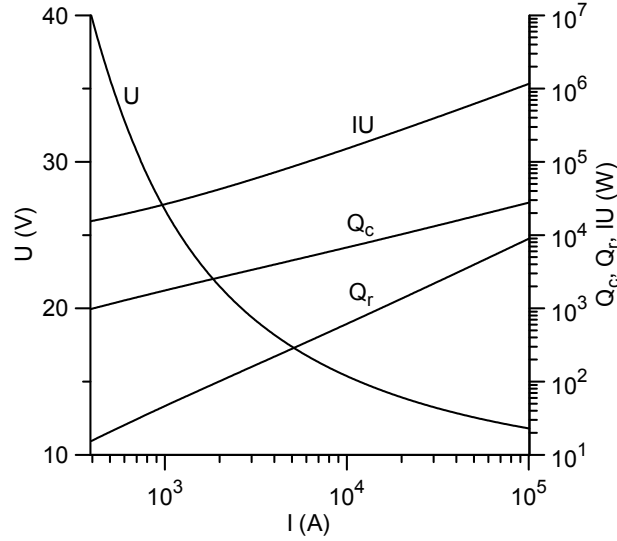


Figura 3.4: Característica tensão-corrente de uma mancha solitária, potência removida por condução térmica, potência irradiada e potência introduzida na camada de plasma junto ao cátodo.

intervalo de baixas correntes, apresentados no capítulo 2. A razão para esta diferença reside no facto da temperatura dos electrões na camada junto ao cátodo no modo difuso a baixas correntes ser consideravelmente menor do que no caso do modo mancha. Isto significa, em particular, que a determinação da queda de tensão junto ao cátodo com base em medições calorimétricas dificilmente poderão ser dignas de confiança no caso do modo mancha solitária.

Podemos ver também na figura 3.4 que a potência irradiada é muito menor que a potência removida pela condução térmica. Este resultado contrasta, mais uma vez, com os resultados apresentados no capítulo 2, estando a razão desta diferença relacionada com o facto dos cátodos considerados no capítulo 2 serem finos.

Na figura 3.5 estão representadas as distribuições, ao longo da superfície do cátodo, da temperatura e das densidades de fluxo de energia e de corrente provenientes do plasma para a superfície do cátodo para alguns valores da corrente de arco. Enquanto as distribuições da temperatura da superfície do cátodo  $T_w(r)$  e da densidade de corrente  $j(r)$  são monótonas, a distribuição da densidade de fluxo de energia  $q(r)$  é não monótona e tem dois máximos (para  $U = 40$  V e  $U = 30$  V) ou um máximo (nos restantes casos). Uma vez que a função  $T_w(r)$  é monótona, a não monotonia da função  $q(r)$  é obviamente uma consequência da dependência não monótona de  $q$  em relação a  $T_w$  para  $U$  fixo.

As distribuições apresentadas na figura 3.5 têm o mesmo aspecto das que foram

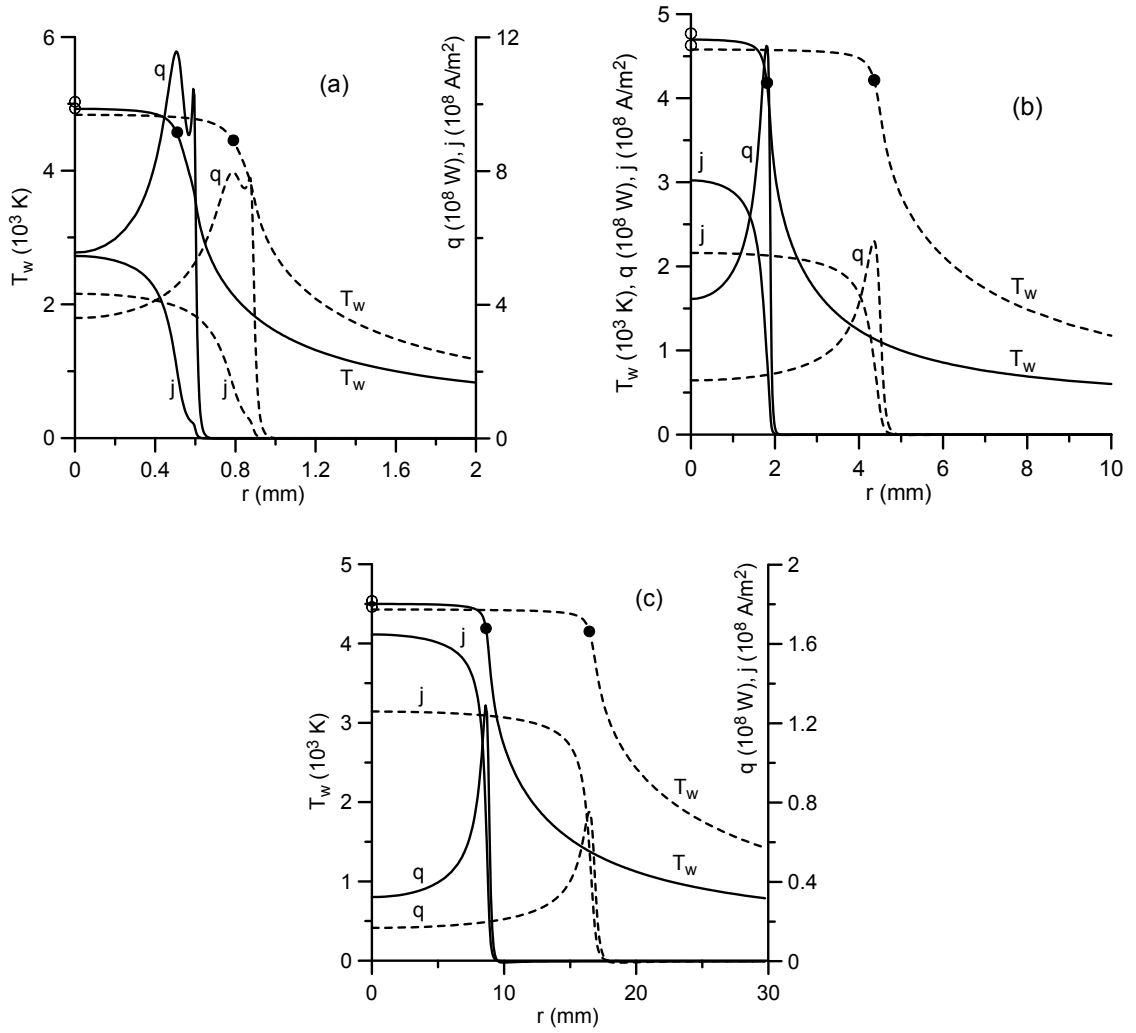


Figura 3.5: Distribuição da temperatura da superfície do cátodo, densidade de fluxo de energia e densidade de corrente eléctrica numa mancha solitária. Círculos cheios: pontos nos quais  $T_w = T_2^{(\max)}$ . Círculos abertos:  $T_2$ . (a) linhas a cheio:  $I = 394$  A ( $U = 40$  V); linhas tracejadas: 743 A (30 V). (b) linhas a cheio: 2.65 kA (20 V); linhas tracejadas: 11.7 kA (15 V). (c) linhas a cheio: 35.8 kA (13 V); linhas tracejadas: 101 kA (11.8 V).

obtidas na modelação numérica efectuada por Benilov [32] e que foram usadas para construir uma teoria assintótica aproximada de manchas nos trabalhos de Benilov [32, 33, 34]: a temperatura da superfície no interior da mancha varia relativamente pouco, estando o seu valor compreendido entre  $T_2^{(\max)}$  e um valor um pouco menor que  $T_2$ ; a densidade de fluxo de energia anula-se abruptamente fora da mancha, isto é, a mancha tem uma margem mais ou menos distinta. A baixas tensões (altas correntes) quando a dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  para  $U$  fixo tem apenas uma secção decrescente  $[T_2^{(\max)}, T_2]$ , esta semelhança era de esperar. Quando se consideram altas tensões (baixas correntes), este resultado significa que a presença de uma outra secção decrescente,  $[T_1^{(\max)}, T^{(\min)}]$ , não altera a estrutura da solução. Na verdade, a temperatura da superfície no interior da mancha corresponde à secção decrescente  $[T_2^{(\max)}, T_2]$  também a tensões altas; o efeito produzido sobre as distribuições da temperatura da superfície na figura 5.5a pela presença de uma outra secção decrescente não é aparente, embora seja manifestado através da distribuição da densidade de corrente [a função  $j(r)$  decresce lentamente na respectiva região]. A variação da densidade de corrente no interior da mancha não é muito considerável, embora seja mais pronunciada que a da temperatura.

A figura 3.5 mostra também que a temperatura máxima no interior da mancha não aumenta quando se aumenta a corrente; de facto, decresce um pouco. Este aspecto é uma consequência do facto da temperatura  $T_2$  ser uma função que aumenta lentamente com a queda de tensão  $U$  (ver figura 3.3) enquanto a característica tensão-corrente de uma mancha solitária  $U(I)$  é uma função que decresce lentamente. Este aspecto pode também ser observado na distribuição da densidade de corrente, embora a variação do máximo da densidade de corrente com a corrente de descarga seja mais pronunciada do que a da temperatura. Podemos dizer que a intensidade da mancha não muda muito quando se aumenta a corrente e que o aumento da corrente é assegurado por um aumento da área da mancha. Este aspecto foi referido por Benilov [89] e é semelhante, em certo sentido, ao efeito da densidade de corrente normal observado em descargas luminescentes em cátodos frios (à medida que a corrente aumenta, a mancha normal expande-se, permanecendo virtualmente constante os parâmetros locais na mancha).

Podemos ver na figura 3.3 que o intervalo de temperatura  $[T_2^{(\max)}, T_2]$  é relativamente estreito. Isto explica a acima mencionada fraca variação da temperatura (e dos outros parâmetros) no interior da mancha. Além disso, podemos estimar a temperatura no interior da mancha como  $(T_2^{(\max)} + T_2)/2$  com uma precisão de cerca de 200 – 300 K. A temperatura da mancha estimada desta maneira é governada principalmente pela função de trabalho do material de que é feito o cátodo; a dependência relativamente a outros parâmetros é relativamente fraca. Esta última conclusão está



em conformidade com o facto revelado por várias experiências realizadas com arcos de argon à pressão atmosférica e cátodos feitos de tungsténio puro ou de tungsténio toriado com correntes da ordem das poucas centenas de ampéres (ver os trabalhos de Ushio *et al* [91] e de Haidar e Farmer [92, 93, 94, 95]): a temperatura da mancha é virtualmente independente do valor exacto da corrente de descarga e da geometria do cátodo, sendo cerca de 3500 K no caso de um cátodo de tungsténio toriado e cerca de mil kelvin mais elevada no caso de um cátodo feito de tungsténio puro (para o qual a função de trabalho é consideravelmente mais elevada que a do tungsténio toriado). Mais recentemente, este mesmo efeito foi relatado por Nemchinsky e Showalter [96] para o caso de um cátodo de háfnio a operar num plasma de oxigénio para valores da corrente de arco de 200 A (para os valores da pressão do plasma de 2.0 atm, 3.3 atm e 3.9 atm) e 400 A (para os valores da pressão do plasma de 3.3 atm e 4.8 atm).

Na figura 3.5 podemos ver que a temperatura no interior da mancha excede a temperatura de fusão do tungsténio, a qual é aproximadamente 3700 K. Por consequência, existe uma poça de metal fundido no interior da mancha, podendo a forma da superfície ser distorcida. Contudo, uma vez que estamos principalmente interessados em estabelecer resultados qualitativos, este fenómeno não será abordado nesta dissertação. Note-se que esta abordagem é semelhante à que é utilizada na modelação da interacção plasma-cátodo na soldadura por arco (ver por exemplo, [97]), na qual a fusão dos cátodos é usualmente não considerada e é assumido que a forma da superfície do cátodo permanece fixa no decorrer do tempo.

### **3.3 Modos num cátodo finito**

Nesta secção, é apresentada primeiramente uma solução assintótica para um cátodo finito no limite de altas correntes. Depois disso, são apresentados os resultados das modelações numéricas dos modos difuso e mancha axialmente simétricos em cátodos cilíndricos num grande intervalo de corrente.

#### **3.3.1 Aspectos gerais: solução assintótica no caso limite de altas correntes**

É de esperar que, para valores suficientemente elevados da corrente, qualquer ponto da superfície do cátodo onde é colectada a corrente atinga o acima mencionado valor de temperatura  $T_2$ , à qual a dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  para um dado valor de  $U$  se torna negativa. Então a forma limite da característica tensão-corrente para altas correntes é dada pela fórmula

$$I = \int j [T_2(U), U] dS, \quad (3.6)$$

onde  $j = j(T_w, U)$  é a função que descreve a dependência da densidade de corrente proveniente do plasma para a superfície do cátodo em termos do valor local da temperatura da superfície e da queda de tensão junto ao cátodo (conforme o que foi dito no capítulo 2), o integral é calculado ao longo de toda a superfície do cátodo onde é colectada a corrente. Depois de calculada a característica tensão-corrente  $U = U(I)$  descrita por esta fórmula, podemos determinar a temperatura da superfície do cátodo onde é colectada a corrente em termos da corrente de arco

$$T_w = T_2[U(I)]. \quad (3.7)$$

As equações (3.6) e (3.7) representam uma solução assintótica completa do problema no caso limite de altas correntes. É de realçar que esta solução pode ser obtida sem ser necessário resolver a equação da condução térmica no corpo do cátodo.

Podemos concluir que se existir mais do que um modo de transferência de corrente no intervalo de altas correntes, todos esses modos são assintoticamente semelhantes, isto é, tendem todos para a forma limite descrita pelas equações (3.6) e (3.7).

### 3.3.2 Resultados da modelação numérica

Nesta secção o problema (2.26)-(2.29) é resolvido e os resultados analisados para os casos do modo difuso num grande intervalo de corrente e do modo mancha.

Uma vez que existem diferentes soluções simultaneamente, uma questão importante é assegurar que as iterações converjam para a solução desejada. A solução para a qual as iterações convergem é unicamente determinada pela aproximação inicial utilizada. A construção de uma adequada aproximação inicial é uma questão pouco trivial que requereu muito esforço para a sua resolução; ver pormenores no apêndice A.

Na figura 3.6, são apresentadas as características tensão-corrente de vários modos de transferência de corrente para um cátodo. Podemos ver que a característica tensão-corrente do modo difuso tem duas secções, uma decrescente ( $AB$ ) e outra crescente ( $BC$ ), separadas pelo ponto de mínimo  $B$ . O ponto  $H$  designa o valor da corrente a partir da qual a temperatura no ponto mais quente do cátodo (o qual se situa na margem da superfície frontal) excede  $T_2^{(\max)}$ . Podemos ver que este ponto está posicionado não muito longe do ponto de mínimo. Por conseguinte, podemos dizer, de uma maneira geral, que a secção decrescente da característica tensão-corrente está associada à secção crescente da dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  e *vice versa*. A característica tensão-corrente do modo mancha tem dois ramos  $ED$  e  $EF$  separados por um ponto de retorno  $E$ . Ambos os ramos são decrescentes, excepto uma pequena secção do ramo  $ED$ . O ramo  $EF$ , o qual é caracterizado por possuir valores da tensão junto ao cátodo superiores aos do ramo  $ED$ , será referido no que se segue como ramo

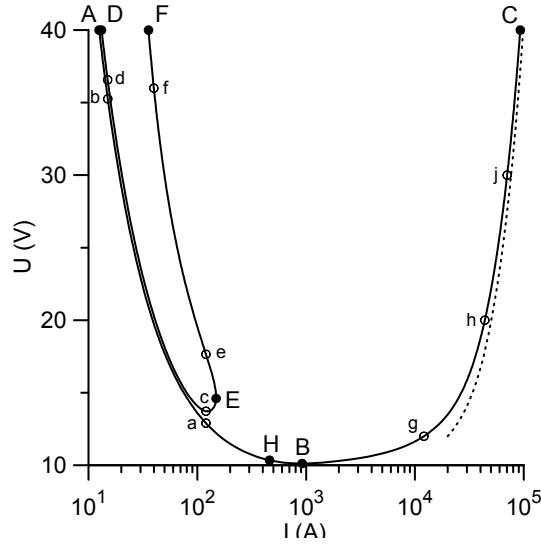


Figura 3.6: Características tensão-corrente de vários modos de transferência de corrente para um cátodo.  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm.  $ABC$ : modo difuso.  $DEF$ : modo mancha. Linha pontuada: comportamento assintótico a altas correntes.

de alta tensão, enquanto o ramo  $ED$  será denominado ramo de baixa tensão. A maior parte do ramo de baixa tensão está muito próxima da característica tensão-corrente do modo difuso.

As propriedades acima referidas estão em conformidade com as considerações qualitativas estabelecidas no trabalho de Benilov [35]; em particular, a figura 5 do trabalho de Benilov [35] (figura 3.7 desta dissertação, onde se representa apenas a parte correspondente às características tensão-corrente dos modos difuso e mancha axialmente simétrica) onde as linhas  $AEF$  e  $D'DD''$  representam as características tensão-corrente do modo difuso e do modo mancha axialmente simétrico, respectivamente. Note-se que as soluções correspondentes aos modos difuso e mancha não se juntam nas condições da modelação numérica referente à figura 3.6, o que não é surpreendente uma vez que ambas as soluções são bidimensionais. Esta questão será abordada em detalhe no capítulo 4. No entanto, alguns comentários relativamente a este ponto serão feitos mais adiante neste capítulo.

Face ao acima exposto, podemos dizer que o padrão geral das características tensão-corrente de vários modos encontrado no trabalho de Benilov [35], com base em considerações qualitativas, é confirmado pela presente modelação numérica. Por outro lado, é de suspeitar que as soluções mancha encontradas nos trabalhos de Moizhes e Nemchinsky [30] e Böttcher e Böttcher [37], as quais terminam simplesmente em vez de voltarem para trás ou se juntarem a outra solução, tenham sido determinadas

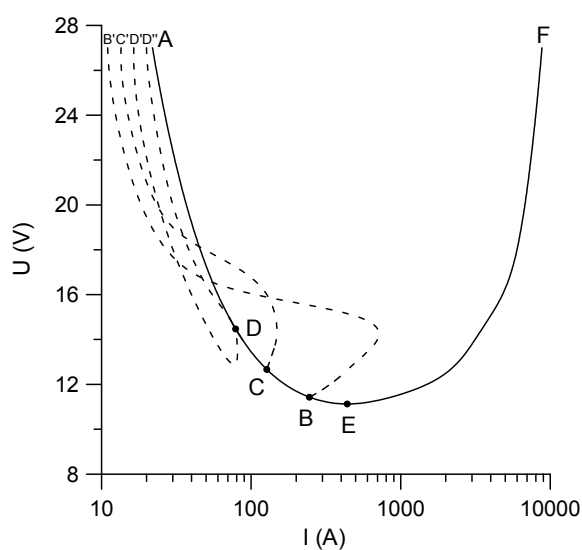


Figura 3.7: Características tensão-corrente de vários modos de transferência de corrente para um cátodo cilíndrico de tungstênio a operar num plasma de argon à pressão atmosférica, retiradas do trabalho de Benilov [35].  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm.  $AEF$ : modo difuso.  $BB'$ : modo com uma mancha na margem da superfície frontal do cátodo.  $CC'$ : modo com duas manchas na margem da superfície frontal do cátodo.  $DD'$ : modo com uma mancha no centro da superfície frontal do cátodo.  $DD''$ : modo com uma mancha em anel na margem da superfície frontal do cátodo.  $B$ ,  $C$  e  $D$ : pontos de bifurcação.  $E$ : ponto de mínimo da característica tensão-corrente do modo difuso.

apenas numa parte dos seus domínios de existência.

Na figura 3.6 podemos ver que o modo difuso é o único que é possível existir para valores de corrente acima de 150 A. Como era de esperar, a característica tensão-corrente deste modo tende, no limite de altas correntes, para a forma assintótica descrita pela equação (3.6) (sendo o integral calculado ao longo da superfície frontal e de toda a superfície lateral do cátodo), a qual é mostrada pela linha pontuada.

Devemos realçar que a presente modelação numérica tem por objectivo encontrar todas as soluções axialmente simétricas que descrevem estados estacionários da distribuição da temperatura no cátodo, sem tomar em atenção a sua estabilidade. Note-se que na modelação efectuada o modo difuso existe em todo o intervalo de corrente considerado. No entanto, é sabido da experiência que o modo difuso deixa de ser observado para baixos valores da corrente, o que indica que este modo de transferência de corrente é instável quando a corrente é suficientemente baixa. A questão da determinação do limite de estabilidade do modo difuso será tratada no capítulo 4 desta dissertação.

Na figura 3.8 está representada a variação da temperatura no centro e na margem da superfície frontal do cátodo, em função da corrente, para os modos difuso e mancha. No caso do modo difuso, no intervalo de corrente  $I \lesssim 3$  kA, a temperatura no centro é inferior à da margem. Este efeito foi observado na modelação efectuada no capítulo 2, no entanto, nas presentes condições, é mais pronunciado: a temperatura na margem pode exceder a temperatura no centro em cerca de mais de 500 K, o que é devido ao alto valor da relação  $R/h$ . Como era de esperar, para altos valores da corrente, as temperaturas no centro do cátodo e na margem da superfície frontal tornam-se iguais, sendo esse valor igual ao valor limite da temperatura descrito pelas equações (3.6) e (3.7), o qual é mostrado pela linha pontuada.

No caso do modo mancha, a temperatura no centro do cátodo é, em todos os casos, superior à da margem da superfície frontal. A diferença de temperaturas existente no ramo de alta tensão  $EF$  é consideravelmente maior que a existente no ramo de baixa tensão  $ED$ . No ramo de alta tensão, a temperatura no centro diminui à medida que a corrente aumenta, enquanto a temperatura na margem aumenta. Na maior parte do ramo de baixa tensão, as temperaturas no centro e na margem aumentam à medida que aumenta o valor da corrente, sendo a diferença de temperaturas aproximadamente constante.

A temperatura no centro da superfície frontal do cátodo no caso do modo mancha excede a temperatura de fusão do tungsténio, enquanto a temperatura na margem situa-se abaixo da temperatura de fusão. Note-se que este resultado não é necessariamente o que ocorre noutras condições; de facto, é sabido da experiência que a temperatura da mancha pode ser menor que a temperatura de fusão. No caso do modo difuso a altas correntes, ambas as temperaturas, na margem e no centro, excedem a tempera-

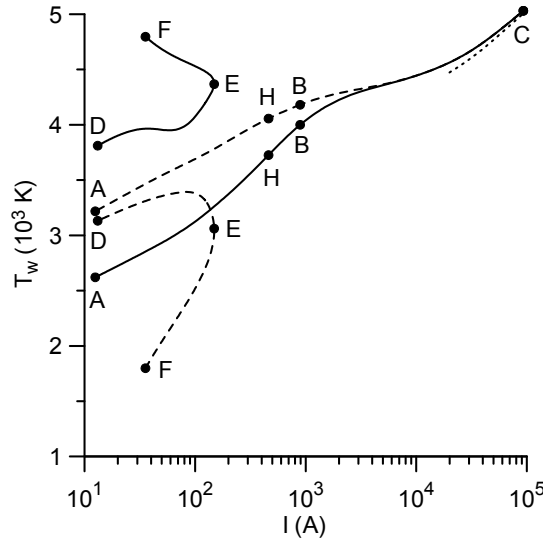


Figura 3.8: Temperatura no centro e na margem da superfície frontal do cátodo para diferentes modos de transferência de corrente.  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm. Linhas a cheio: temperatura no centro. Linhas tracejadas: temperatura na margem. Linha pontilhada: comportamento assintótico a altas temperaturas.

tura de fusão e a extremidade do cátodo encontra-se fundida, podendo, por isso, mudar a sua forma. Este fenómeno está para além do objectivo desta dissertação, não sendo, por isso, considerado. É de referir que na modelação da interacção plasma-cátodo na soldadura por arco eléctrico (ver por exemplo, [97]) a fusão dos cátodos é usualmente não levada em consideração e é assumido que a forma do cátodo mantém-se fixa no espaço e no tempo quer na soldadura por arco de metal, onde o papel do cátodo é desempenhado por uma (grande) peça de trabalho quer na soldadura por arco de gás de tungsténio, onde o papel do cátodo é desempenhado por um eléctrodo (fino) auxiliar.

Na figura 3.9 podemos ver as distribuições da temperatura ao longo da superfície do cátodo para vários estados (indicados na figura 3.6) referentes a diferentes modos de transferência de corrente. Note-se que o intervalo  $0 \leq r + z \leq 2$  mm nas figuras 3.9-3.11 corresponde à superfície frontal enquanto o intervalo  $r + z \geq 2$  mm corresponde à superfície lateral. Quer no modo difuso (estados *a* e *b*) quer no ramo de baixa tensão do modo mancha (estados *c* e *d*), a temperatura decresce à medida que a corrente diminui, com a diferença que o ponto mais quente está na margem do cátodo no caso do modo difuso e no centro da superfície frontal do cátodo no caso do ramo de baixa tensão do modo mancha. As distribuições da temperatura no caso do ramo de alta tensão do modo mancha (estados *e* e *f*) revelam a formação de uma mancha no centro da parte frontal do cátodo. A mancha torna-se mais pronunciada à medida que a corrente

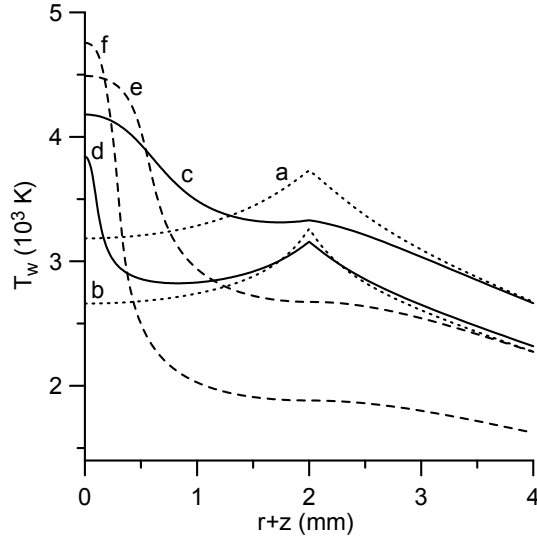


Figura 3.9: Distribuições da temperatura ao longo da superfície do cátodo para estados referentes a vários modos de transferência de corrente.  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm.

diminui: a temperatura aumenta no interior da mancha e diminui no exterior, o que conduz a uma diminuição do raio da mancha.

A transição limite para o regime assintótico de altas correntes descrito pelas equações (3.6) e (3.7) é ilustrada pela figura 3.10, onde são apresentadas distribuições da temperatura ao longo da superfície do cátodo correspondentes a diferentes estados do modo difuso (estados  $g$ ,  $h$  e  $j$ , indicados na figura 3.6) para altos valores da corrente de arco. As linhas ponteadas representam os respectivos valores de  $T_2$ . Podemos ver que para altos valores da corrente a temperatura torna-se constante e igual a  $T_2$  em todos os pontos da superfície do cátodo excepto numa pequena secção da superfície lateral adjacente à extremidade do cátodo sujeita ao arrefecimento, onde  $T_w$  decresce rapidamente para a temperatura de arrefecimento.

Na figura 3.11, apresenta-se a distribuição do fluxo de energia sobre a superfície do cátodo para alguns estados pertencentes ao modo difuso. Em todos esses estados, as distribuições são não monótonas. No estado  $j$ , a distribuição tem dois máximos (pouco distinguíveis no gráfico), os quais têm a sua origem no facto acima mencionado de que a dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  para altos valores de  $U$  tem dois máximos. A distribuição correspondente ao estado  $b$  tem apenas um máximo, embora a respectiva tensão seja superior à do estado  $j$ . A razão reside no facto do valor máximo da temperatura do cátodo estar abaixo de  $T_1^{(\max)}$  no estado  $b$ . Para baixos valores da corrente, o máximo da densidade de fluxo de energia ocorre na margem da superfície frontal do cátodo. Com um aumento da corrente, o máximo é deslocado para a superfície

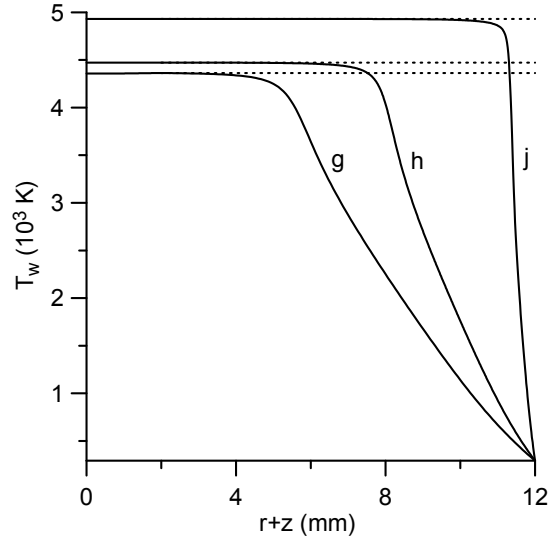


Figura 3.10: Distribuições da temperatura ao longo da superfície do cátodo para estados referentes ao modo difuso a altas correntes.  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm. Linhas ponteadas: valores limite da temperatura do cátodo.

lateral e depois no sentido da extremidade do cátodo sujeita ao arrefecimento. A altas correntes, a densidade de fluxo de energia é muito pequena em todos os pontos da superfície do cátodo excepto numa secção adjacente à extremidade arrefecida, onde a temperatura é diferente de  $T_2$ .

Para além dos cálculos acima referidos, foram realizados cálculos para o caso de um cátodo com uma superfície lateral electricamente e termicamente isolada. Nestes cálculos, foram consideradas nulas as densidades de fluxo de energia e de corrente eléctrica ao longo da superfície lateral do cátodo. Para este modelo, a solução que descreve o modo difuso é unidimensional,  $\psi = \psi(z)$ , e foi mostrado por Benilov [35], com base na análise de bifurcações, que as soluções que descrevem os modos difuso e mancha juntam-se ou, por outras palavras, as soluções que descrevem modos mancha emergem a partir da solução que descreve o modo difuso.

Os resultados destes cálculos estão presentes nas figuras 3.12, 3.13 e 3.15. A figura 3.12 é muito semelhante à figura 3.6. É interessante notar, contudo, que a maior parte da secção  $GD$  do ramo de baixa tensão da característica tensão-corrente do modo mancha na figura 3.12 situa-se ligeiramente abaixo da característica tensão-corrente do modo difuso, enquanto o ramo de baixa tensão na figura 3.6 está sempre acima da característica tensão-corrente do modo difuso. Existe apenas uma linha referente ao modo difuso na figura 3.13 uma vez que a temperatura no modo difuso é a mesma em todos os pontos da superfície frontal de um cátodo com a superfície lateral isolada.



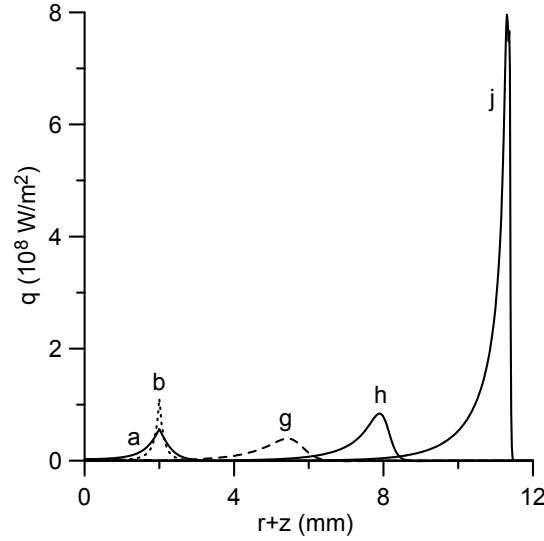


Figura 3.11: Distribuições da densidade de fluxo de energia ao longo da superfície do cátodo para estados referentes ao modo difuso.

As linhas relativas ao ramo de alta tensão na figura 3.13 são semelhantes às presentes na figura 3.8. De facto, essas linhas são muito próximas uma da outra se forem apresentadas na mesma escala, o que se pode ver na figura 3.14. Contudo, as figuras 3.8 e 3.13 são diferentes no que diz respeito ao ramo de baixa tensão do modo mancha: a temperatura no centro é menor que a da margem ao longo da secção  $GD$  na figura 3.13 enquanto na figura 3.8 a temperatura no centro no caso do modo mancha é sempre maior que a da margem. A razão desta diferença reside no facto do modo mancha em anel [35], o qual corresponde à secção  $GD$  na figura 3.13, não ocorrer nas condições da figura 3.8.

Nas figuras 3.12 e 3.13 mostra-se também o comportamento assintótico no caso limite das altas correntes. Para calcular este comportamento, o integral presente na equação (3.6) foi calculado apenas ao longo da superfície frontal do cátodo. Como podemos ver, existe uma boa concordância entre os resultados numéricos e o comportamento assintótico.

O ponto  $G$  presente nas figuras 3.12, 3.13 e 3.15 foi determinado com base nas fórmulas resultantes da teoria de bifurcações desenvolvida por Benilov [35]. Este ponto representa um ponto de bifurcação no qual a primeira solução axialmente simétrica emerge a partir da solução que descreve o modo difuso. A modelação efectuada para o caso do cátodo com a superfície lateral isolada mostra que as soluções que descrevem os modos mancha e difuso tornam-se exactamente iguais neste ponto. Na figura 3.15, mostra-se o comportamento assintótico, na vizinhança do ponto de bifurcação, da

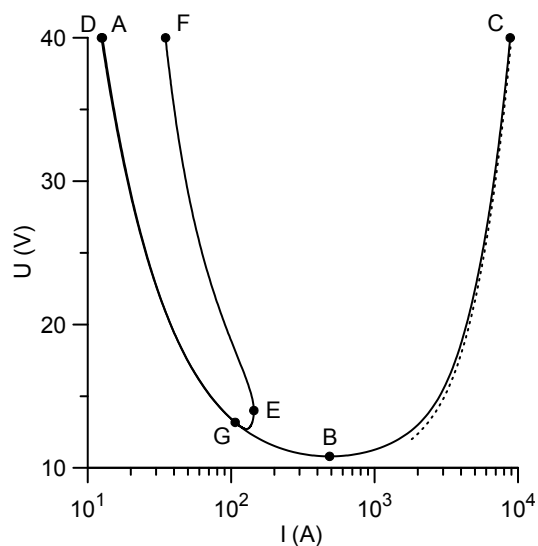


Figura 3.12: Características tensão-corrente de vários modos de transferência de corrente para um cátodo com a superfície lateral isolada.  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm.  $ABC$ : modo difuso.  $DEF$ : modo mancha. Linha pontilhada: comportamento assintótico a altas correntes.

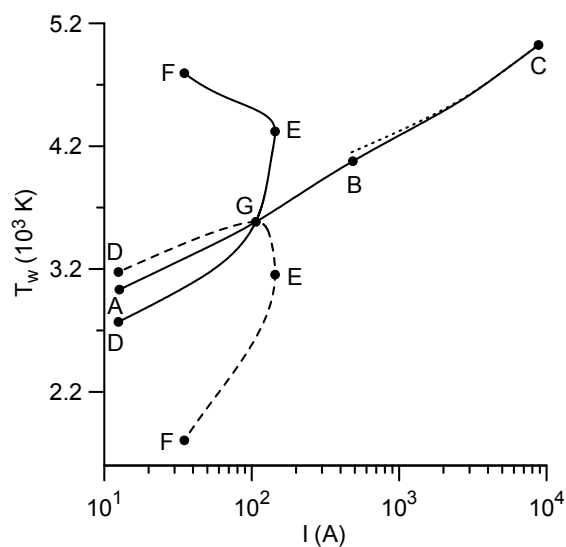


Figura 3.13: Temperatura no centro e na margem da superfície frontal do cátodo com a superfície lateral isolada para diferentes modos de transferência de corrente.  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm. Linhas a cheio: temperatura no centro. Linha tracejada: temperatura na margem. Linha pontilhada: comportamento assintótico a altas correntes.

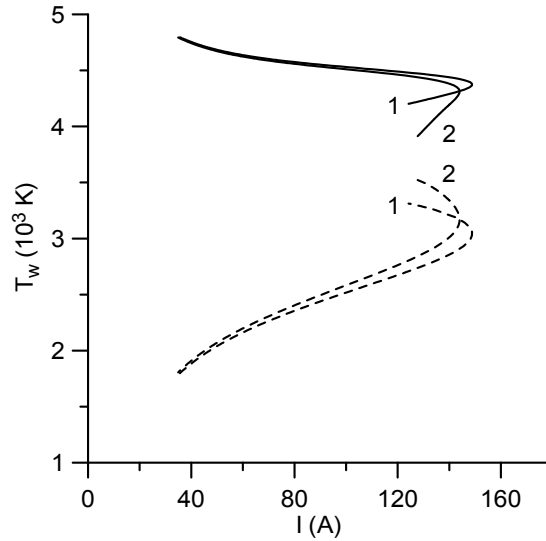


Figura 3.14: Temperatura no centro e na margem da superfície frontal do cátodo para o ramo de alta tensão do modo mancha.  $R = 2\text{ mm}$ ,  $h = 10\text{ mm}$ . Linha a cheio: temperatura no centro. Linha tracejada: temperatura na margem. 1: cátodo com a superfície lateral activa. 2: cátodo com a superfície lateral isolada.

temperatura no centro e na margem da superfície frontal do cátodo no caso do modo mancha, como determinado pelas fórmulas obtidas por Benilov [35]. Podemos ver que os resultados da modelação estão em conformidade com os resultados da teoria de bifurcações.

Na parte restante desta secção vamos estudar o efeito da variação das dimensões do cátodo. Na figura 3.16, podemos ver que um aumento do raio do cátodo, mantendo a altura fixa, origina um deslocamento das características tensão-corrente no sentido das altas correntes. O ponto de mínimo das características tensão-corrente do modo mancha é deslocado no sentido das altas correntes observando-se simultâneamente uma leve diminuição da tensão. O ramo de alta tensão da característica tensão-corrente do modo mancha aproxima-se da característica tensão-corrente do modo mancha solitária.

A figura 3.17 mostra as distribuições da temperatura ao longo da superfície do cátodo para cátodos com diferentes raios, para diferentes modos de transferência de corrente para a mesma corrente de 1 kA. Nesta figura as linhas ponteadas representam a distribuição da temperatura numa mancha solitária com uma corrente de 1 kA, enquanto os círculos representam os valores limite da temperatura do cátodo  $T_2$  calculados para o valor de  $U$  correspondente à acima mencionada corrente para o valor de  $R$  em questão. No modo difuso (figura 3.17a), a temperatura na margem é pouco afectada por uma variação de  $R$ , enquanto a temperatura no centro do cátodo

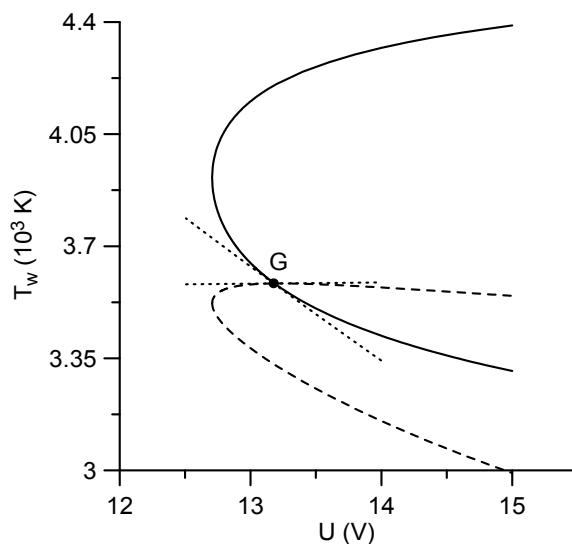


Figura 3.15: Temperatura no centro e na margem da superfície frontal do cátodo com a superfície lateral isolada para o modo mancha na vizinhança do ponto de bifurcação.  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm. Linha a cheio: temperatura no centro. Linha tracejada: temperatura na margem. Linhas ponteadas: comportamento assintótico na vizinhança do ponto de bifurcação.

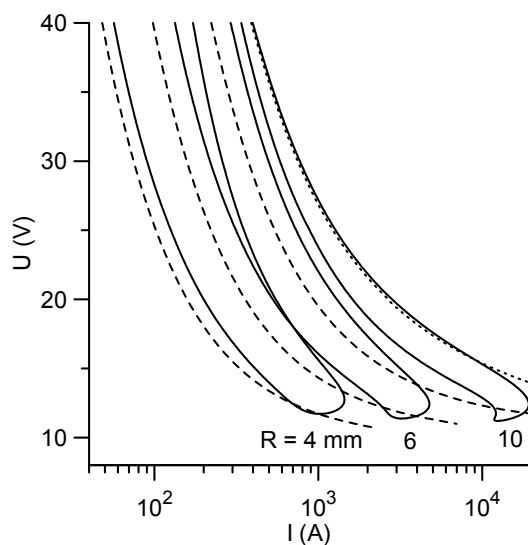


Figura 3.16: Características tensão-corrente de vários modos de transferência de corrente para cátodos com diferentes raios.  $h = 10$  mm. Linhas a cheio: modo mancha. Linhas tracejadas: modo difuso. Linha pontilhada: mancha solitária.

diminui consideravelmente à medida que  $R$  aumenta. Podemos falar neste caso de uma estrutura de corrente em anel ligada à margem do cátodo. Como podemos ver na figura 3.17a, os valores da temperatura na margem da mancha são um pouco menores que a temperatura limite; a diferença de temperaturas aumenta suavemente à medida que aumenta o raio do cátodo. A razão para este aumento tem a ver com o facto de que quanto maior é o raio do cátodo, mais distante do limite assintótico de altas correntes se encontra um estado correspondente a um determinado valor fixo da corrente no modo difuso.

À medida que o raio do cátodo aumenta, a distribuição da temperatura no ramo de alta tensão do modo mancha (figura 3.17b) tende para a distribuição correspondente a uma mancha solitária com o mesmo valor de corrente. Este resultado está em conformidade com o facto acima mencionado de que o ramo de alta tensão da característica tensão-corrente torna-se próximo da característica tensão-corrente da mancha solitária. A distribuição da temperatura no ramo de baixa tensão (figura 3.17c), para grandes valores de  $R$ , surge como uma sobreposição das distribuições correspondentes ao modo difuso e ao ramo de alta tensão: à medida que  $R$  aumenta, vai-se formando uma mancha no centro da parte frontal do cátodo enquanto uma estrutura em anel vai-se formando na margem.

À medida que a altura do cátodo aumenta, mantendo fixo o raio, (figura 3.18), a característica tensão-corrente do modo difuso vai sendo deslocada no sentido das baixas correntes (ou baixas tensões). Os ramos de alta tensão e de baixa tensão da característica tensão-corrente do modo mancha tornam-se muito próximos e a característica no seu todo é rapidamente deslocada no sentido das baixas correntes e das altas tensões.

Os cálculos apresentados na figura 3.18 foram efectuados para  $R = 0.75$  mm e para um plasma de argon à pressão de 2.6 atm com o objectivo de simular as condições dos trabalhos do grupo de Mentel [72, 98, 86], nos quais foram obtidos dados experimentais para o modo mancha no caso de cátodos de tungsténio com valores de raio a variar entre 0.3 mm e 1 mm e a altura igual ou maior que 20 mm a operar num plasma de argon à pressão de 2.6 atm. Com base na figura 3.18, podemos supor que soluções que descrevem modos mancha axialmente simétricos dificilmente existirão nestas condições experimentais. É interessante notar, contudo, que ambos os ramos da característica tensão-corrente do modo mancha na figura 3.18 tornam-se, para altos valores de  $h$ , muito próximos da característica tensão-corrente do modo difuso, o que está em conformidade com os acima citados trabalhos experimentais.

As figuras 3.16 e 3.17b dão-nos uma ideia da relação existente entre modos mancha em cátodos grossos e o modo mancha solitária num cátodo plano infinito: podemos supor que o modo mancha solitária representa uma forma limite do modo mancha

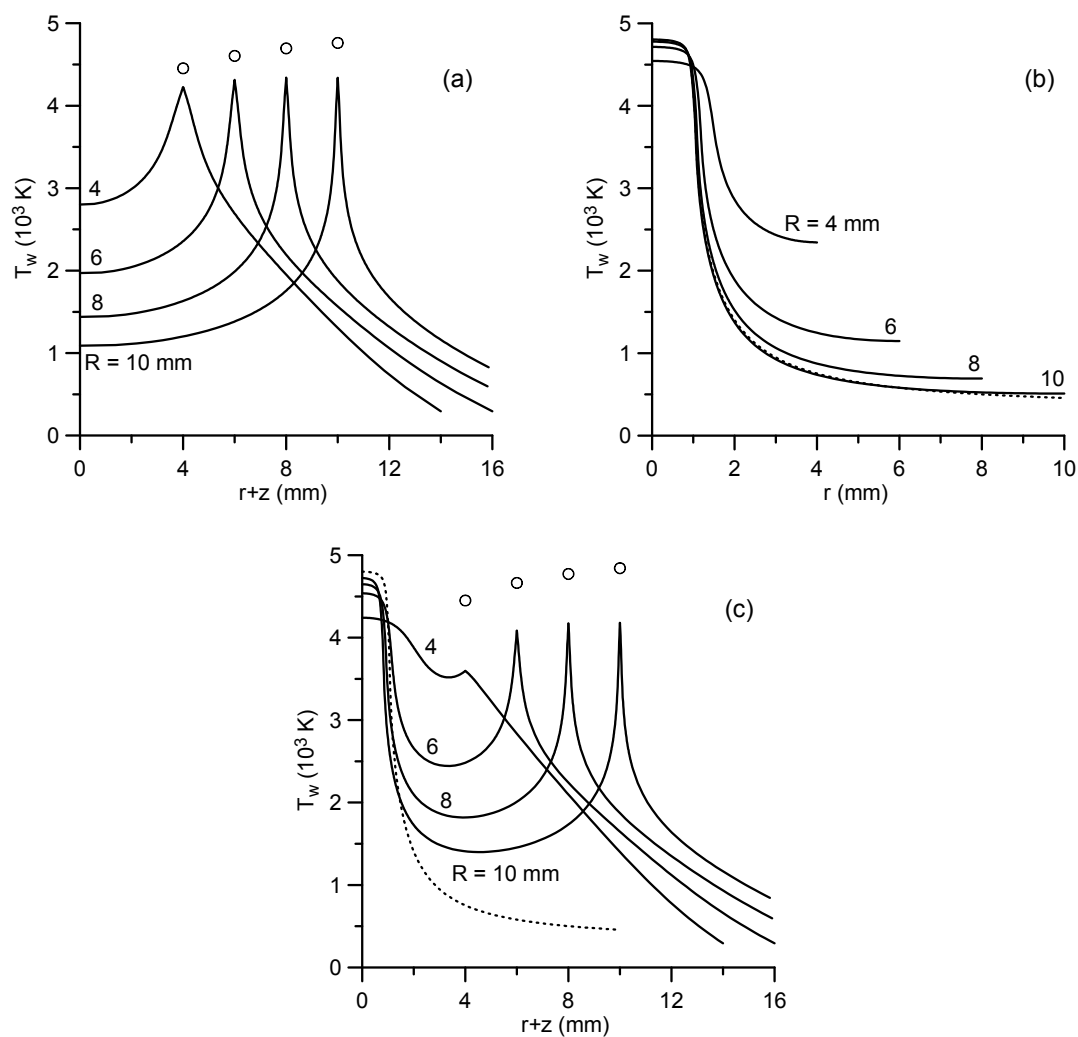


Figura 3.17: Distribuições da temperatura ao longo da superfície de cátodos com diferentes raios.  $h = 10$  mm,  $I = 1$  kA. Linha pontada: distribuição da temperatura na mancha solitária. Círculos: valores limite da temperatura do cátodo. (a) modo difuso. (b) ramo de alta-tensão do modo mancha. (c) ramo de baixa-tensão do modo mancha.

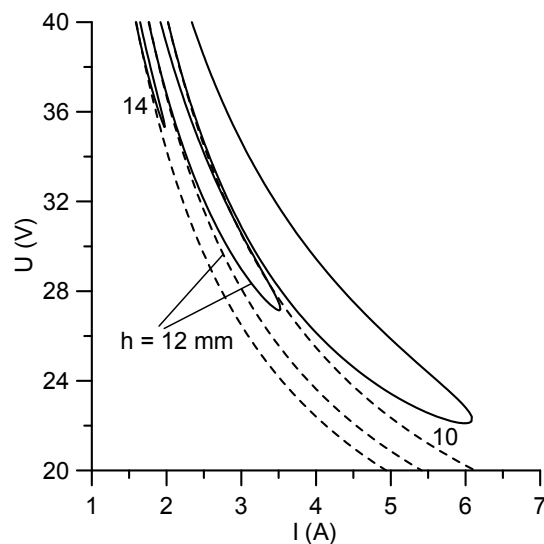


Figura 3.18: Características tensão-corrente de vários modos de transferência de corrente para cátodos com alturas diferentes.  $R = 0.75 \text{ mm}$ , plasma de argon à pressão de  $2.6 \text{ atm}$ . Linhas a cheio: modo mancha. Linhas tracejadas: modo difuso.

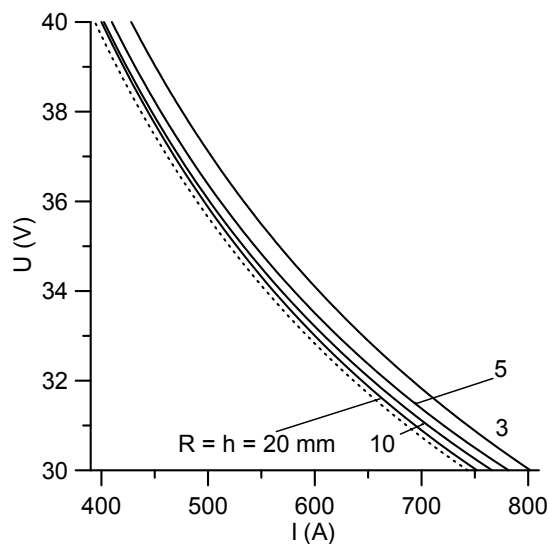


Figura 3.19: Características tensão-corrente do ramo de alta-tensão do modo mancha de transferência de corrente para cátodos com diferentes dimensões (linhas a cheio). Linha pontilhada: mancha solitária.

de alta tensão. Com o objectivo de verificar esta hipótese, procedeu-se ao cálculo da característica tensão-corrente do modo mancha de alta tensão em cátodos com  $R = h$ . Na figura 3.19, podemos ver que a característica tensão-corrente do modo mancha de alta tensão tende na verdade para a característica tensão-corrente da mancha solitária à medida que as dimensões do cátodo aumentam. Com um aumento das dimensões do cátodo, a queda de tensão diminui: um aumento das dimensões do cátodo resulta num melhor isolamento térmico da mancha (isto é, num aumento da distância entre a mancha e a superfície arrefecida) e numa potência menor necessária para manter a descarga.

### **3.3.3 Definição dos modos difuso e mancha**

Nesta secção será considerado o significado preciso que é atribuído neste trabalho às designações *modo difuso* e *modo mancha*. Em essência, isto equivale a colocar a seguinte questão: se num determinado intervalo de corrente são encontrados múltiplos regimes, será que existe alguma razão para associar um (ou vários) desses regimes com o modo difuso e os outros com os modos mancha?

Esta interessante questão teórica foi considerada no trabalho de Böttcher e Böttcher [38]. A definição de Böttcher e Böttcher [38] foi dada em termos da distribuição do fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo. Se esta distribuição é não monótona e o máximo não está situado no ponto mais quente da superfície, então a respectiva solução pertence ao modo mancha. No modo difuso, o máximo da densidade de fluxo de energia está situado no ponto mais quente da superfície e a densidade de fluxo de energia é uma função monótona. Num modo mancha, a margem da mancha é definida como a linha onde a densidade de fluxo de energia é máxima.

A definição acima referida é citada no artigo de revisão de Jüttner [3] e é de interesse analisá-la face aos resultados descritos neste capítulo. Não existem dúvidas de que a distribuição do fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo no modo mancha é não monótona e tem o seu máximo na periferia da mancha, sendo a temperatura na periferia menor que no centro da mancha; de facto, os dados correspondentes ao modo mancha apresentados na figura 5 do trabalho de Böttcher e Böttcher [38], nos quais a acima citada definição é baseada, são semelhantes aos apresentados na figura 4 do trabalho de Benilov [32] e na figura 3.5 deste capítulo. Contudo, existem alguns problemas com esta difinição.

Em primeiro lugar, não existe uma relação directa entre o máximo da densidade de fluxo de energia que ocorre num ponto que não é o mais quente da superfície e a monotonia da distribuição da densidade de fluxo de energia. Podemos considerar



como exemplo os estados  $a$  e  $b$  pertencentes à secção decrescente da característica tensão-corrente do modo difuso na figura 3.6: podemos ver nas figuras 3.9 e 3.11 que a distribuição do fluxo de energia nestes estados é não monótona, contudo o máximo ocorre no ponto mais quente da superfície, o qual está situado na margem da superfície frontal do cátodo. Por consequência, o respectivo modo não pode ser denominado de difuso nem de mancha se a definição de Böttcher e Böttcher [38] for usada. Além disso, os estados  $g$ ,  $h$ , e  $j$  que pertencem à secção crescente da característica tensão-corrente do modo difuso na figura 3.6 deveriam ser vistos como pertencentes ao modo mancha de acordo com a definição de Böttcher e Böttcher [38], o que dificilmente seria natural de aceitar uma vez que a temperatura nestes estados é praticamente constante ao longo da maior parte da superfície do cátodo. Estes exemplos indicam que a definição de Böttcher e Böttcher [38] não é suficientemente geral para ser aplicável às condições descritas neste capítulo.

Uma definição alternativa pode ser formulada como se segue. Intuitivamente, admite-se que se a corrente se encontra distribuída ao longo da superfície frontal do cátodo de uma maneira mais ou menos uniforme, então a descarga opera no modo difuso; num modo mancha, a distribuição de corrente é essencialmente não uniforme. Alguns teóricos usam, em vez da designação *modos mancha*, a designação *modos constritos de transferência de corrente*, significando por *constrito* a não uniformidade da distribuição dos parâmetros ao longo da superfície do cátodo, a qual é causada não apenas pela não uniformidade das condições de fronteira (como, por exemplo, a forma do cátodo). Qualquer uma destas duas definições não são ambíguas no caso de um cátodo cilíndrico com a superfície lateral isolada, no qual a temperatura no modo difuso é constante em todos os pontos da superfície frontal do cátodo. Por consequência, podemos afirmar que as linhas  $ABC$  e  $DEF$  na figura 3.12 referem-se aos modos difuso e mancha, respectivamente. Um aspecto específico do modo difuso na figura 3.12 que pode ser usado como ponto de partida para uma definição formal é que este modo é o único que existe a altas correntes. Por outras palavras, podemos adoptar a seguinte definição simples: um modo que existe num grande intervalo de corrente, incluindo as altas correntes, é um modo difuso; os modos que deixam de existir à medida que a corrente aumenta são modos mancha.

Existe apenas um modo a altas correntes em todos os casos considerados neste capítulo; nas condições da figura 3.7, tal modo é representado pela linha  $ABC$ . De acordo com a definição acima referida, isto significa que as linhas  $ABC$  e  $DEF$  na figura 3.7 referem-se aos modos difuso e mancha, respectivamente, à semelhança das linhas presentes na figura 3.12.

É de realçar que a definição acima referida está em conformidade com o facto experimental bem conhecido de que "o modo difuso é favorecido pelas altas correntes"

(ver por exemplo, o trabalho de Lichtenberg *et al* [24]); por outras palavras, é convencional denominar de difuso um modo que ocorre a altas correntes. É também consistente com o facto acima estabelecido de que a temperatura, a altas correntes, é constante ao longo da maior parte da superfície do cátodo.

É de realçar também que as soluções que descrevem os modos difuso e mancha não são necessariamente diferentes do ponto de vista qualitativo para todos os valores da corrente. Um exemplo pode ser visto na figura 3.9: as distribuições da temperatura ao longo da superfície frontal do cátodo no modo difuso e no ramo de baixa tensão do modo mancha não são fundamentalmente diferentes. Outro exemplo pode ser encontrado na figura 3.17: não existe uma diferença fundamental entre a região de alta temperatura no centro da superfície frontal do cátodo (a qual, de acordo com a definição acima referida, pode ser denominada mancha) e a região de alta temperatura na margem do cátodo (a qual não é uma mancha e pode ser denominada, por exemplo, como *estrutura ligada a uma não uniformidade geométrica*); em particular, qualquer uma delas pode estar presente ou não. Por consequência, é difícil fazer uma distinção entre o modo difuso e os modos mancha se apenas for considerado um valor da corrente e é precisamente esta a razão porque a definição acima referida é baseada no comportamento das soluções num grande intervalo de corrente.

### 3.4 Conclusões

Neste capítulo foram estudadas manchas solitárias em cátodos planos infinitos e os modos difuso e mancha axialmente simétricos em cátodos finitos no caso de descargas de arco de alta pressão num grande intervalo de corrente. Foram analisados aspectos gerais destes modos de transferência de corrente e apresentado um extenso conjunto de resultados numéricos para cátodos de tungsténio planos e cilíndricos a operar num plasma de arco de argon.

A temperatura no interior de uma mancha solitária varia relativamente pouco, entre um valor  $T_2^{(\max)}$  que corresponde ao (segundo) máximo da dependência de  $q$  em relação a  $T_w$ , para um dado valor de  $U$ , e um valor  $T_2$  para o qual  $q$  torna-se negativa, para o mesmo valor de  $U$ , sendo este resultado válido quer no caso de baixas tensões (altas correntes) quando a dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  para  $U$  fixo tem apenas um máximo quer no caso de altas tensões (baixas correntes) quando outro máximo aparece. Uma vez que o intervalo de temperatura  $[T_2^{(\max)}, T_2]$  é relativamente estreito, é possível obter uma estimativa razoável da temperatura no interior duma mancha solitária sem ser necessário resolver a equação da condução térmica no corpo do cátodo: é suficiente calcular a densidade de fluxo de energia  $q(T_w, U)$  e determinar  $T_2^{(\max)}$  e  $T_2$ .

O comportamento assintótico das soluções para cátodos finitos no limite das altas correntes é descrito pelas equações (3.6) e (3.7). Os resultados numéricos apresentados para cátodos cilíndricos confirmam este comportamento. Estes resultados confirmam também um padrão geral das características tensão-corrente de vários modos de transferência de corrente em cátodos finitos sugerido no trabalho de Benilov [35]. A transição dos modos mancha num cátodo finito no limite de cátodos de grandes dimensões para a mancha solitária num cátodo plano infinito foi estudada, tendo-se obtido como resultado que o modo mancha solitária representa uma forma limite do modo mancha de alta tensão num cátodo finito.

Os cálculos efectuados para o caso de um cátodo com a superfície lateral electricamente e termicamente isolada estão de acordo com as predições da teoria de bifurcações desenvolvida por Benilov [35]. Por um lado, isto pode ser considerado como uma verificação da abordagem numérica utilizada nesta dissertação. Por outro lado, o comportamento assintótico predito no trabalho de Benilov [35] pode ser convenientemente utilizado como uma aproximação inicial para o cálculo da solução que descreve o modo mancha na vizinhança do ponto de bifurcação. Podemos obter aproximações iniciais fora desta vizinhança e ou para outras condições através do movimento ao longo do espaço de parâmetros (ver apêndice A).

Uma questão teórica interessante é a seguinte: se forem encontrados múltiplos regimes de transferência de corrente num certo intervalo de corrente, existe uma maneira não ambígua para associar alguns deles com o modo difuso e outros com os modos mancha? Verificou-se que a seguinte definição simples pode ser usada (pelo menos, nas condições tratadas nesta dissertação): um modo que existe num grande intervalo de corrente, incluindo as altas correntes, é um modo difuso; os modos que deixam de existir à medida que a corrente aumenta são modos mancha. Verificou-se também que os modos difuso e mancha não são necessariamente diferentes do ponto de vista qualitativo para qualquer valor da corrente. É precisamente este facto que torna apropriado o uso de uma definição baseada no comportamento dos modos num grande intervalo de corrente.

O cálculo da temperatura da superfície do cátodo mostra que esta excede a temperatura de fusão do tungsténio num determinado número de casos, tais como no interior de uma mancha solitária num cátodo plano infinito, no centro da superfície frontal de um cátodo cilíndrico no modo mancha e em toda a superfície frontal de um cátodo cilíndrico no modo difuso a altas correntes. Uma vez que a modelação numérica efectuada neste capítulo foi realizada para cátodo com forma fixa, os respectivos resultados deverão ser considerados como qualitativos em tais casos. Um outro factor que foi desprezado neste trabalho e que se torna relevante a altas correntes é o aquecimento de Joule no corpo do cátodo. Algumas limitações adicionais são impostas aos resultados

apresentados neste capítulo e, em particular, na acima referida definição dos modos difuso e mancha pela natureza térmica do modelo considerado (por exemplo, o modo mancha deve ser suportado pela constrição do arco causada pelas forças magnéticas devidas ao campo magnético criado pelo próprio arco).

Foi mostrado analiticamente no trabalho de Benilov [35] que soluções bidimensionais e tridimensionais que descrevem modos mancha juntam-se à (ou, por outras palavras, emergem a partir da) solução unidimensional que descreve o modo difuso num cátodo cilíndrico com a superfície lateral isolada. Em concordância com esta predição, a modelação numérica considerada neste capítulo revelou que a solução bidimensional que descreve o modo mancha junta-se à solução unidimensional que descreve o modo difuso. Quando se considera cátodos com a superfície lateral colectora de corrente, os modos mancha e difuso não se juntam o que não constitui qualquer surpresa uma vez que ambas as soluções são bidimensionais. Contudo, é de esperar que soluções tridimensionais que descrevem modos mancha se juntem às soluções bidimensionais que descrevem os modos difuso e mancha em cátodos axialmente simétricos. Esta última questão será tratada no próximo capítulo.

## Capítulo 4

# Bifurcações de modos mancha tridimensionais a partir de soluções axialmente simétricas

*É desenvolvida uma abordagem para o cálculo de pontos de bifurcação nos quais soluções mancha tridimensionais bifurcam-se a partir de soluções que descrevem o modo difuso e modos mancha axialmente simétricos. Em particular, é calculado o primeiro ponto de bifurcação posicionado na solução que descreve o modo difuso e, por conseguinte, o seu limite de estabilidade, isto é, a corrente abaixo da qual o modo difuso torna-se instável. São apresentados os resultados da modelação numérica efectuada para o caso de um cátodo de tungsténio de forma cilíndrica a operar num plasma de alta pressão. É estudado o efeito produzido no limite de estabilidade pelas variações dos parâmetros de controle (dimensões do cátodo, função de trabalho do material do cátodo, tipo e pressão do gás que produz o plasma). Foi encontrado que o comportamento do limite de estabilidade sujeito a estas variações está em conformidade com as tendências observadas experimentalmente. Foi encontrado que o limite de estabilidade é muito mais sensível às variações dos parâmetros de controle do que as características tensão-corrente do modo difuso, sendo o efeito mais forte produzido pelas variações das dimensões do cátodo e da função de trabalho do material do cátodo.*

### 4.1 Introdução

No caso de um cátodo axialmente simétrico, o modo difuso é descrito por uma solução bidimensional (axialmente simétrica), enquanto os modos mancha são descritos por soluções bidimensionais ou soluções tridimensionais. As soluções bidimensionais que descrevem o modo difuso e modos mancha foram estudadas nos capítulos 2 e 3 desta

dissertação. Quanto às soluções mancha tridimensionais, estas ainda não foram calculadas. No trabalho recente de Böttcher *et al* [40] é relatada uma mancha tridimensional mas só em regime não estacionário. Por mais estranho que pareça é mais fácil calcular uma mancha tridimensional não estacionária do que uma estacionária, o que é devido à dificuldade em obter uma aproximação inicial adequada para modelar uma mancha tridimensional estacionária. Por conseguinte, até ao presente a questão da obtenção de soluções mancha tridimensionais estacionárias continua por resolver.

Uma questão importante que surge nos problemas que têm múltiplas soluções é a de saber se alguma destas soluções bifurca-se a partir de uma das outras, ou, por outras palavras, se ocorrem pontos de bifurcação nestas soluções. No que diz respeito ao modelo não linear do aquecimento de superfície, esta questão foi estudada por Benilov [35] por meio da teoria de bifurcações no caso de cátodos de forma cilíndrica (com secção recta não necessariamente circular) com a superfície lateral electricamente e termicamente isolada. Neste caso a solução que descreve o modo difuso é unidimensional. Foi encontrado que as soluções multidimensionais que descrevem modos mancha bifurcam-se a partir da solução unidimensional que descreve o modo difuso. Em concordância com este resultado, a modelação numérica efectuada no capítulo 3 desta dissertação mostrou que no caso de um cátodo cilíndrico com a superfície lateral isolada existe uma solução mancha axialmente simétrica que bifurca-se a partir da solução difusa unidimensional.

Embora o modelo de um cátodo cilíndrico com a superfície lateral isolada forneça resultados que são qualitativamente correctos em muitos aspectos, dificilmente será adequado para o tratamento de questões de natureza prática. No que diz respeito a cátodos axialmente simétricos com uma superfície activa, as modelações numéricas bidimensionais realizadas no capítulo 3 desta dissertação e no trabalho de Böttcher e Böttcher [37] não detectaram pontos de bifurcação, isto é, o modo mancha e o modo difuso não se juntam. Este resultado não é surpreendente uma vez que para este tipo de cátodos quer a solução que descreve o modo difuso quer as soluções mancha calculadas no capítulo 3 desta dissertação e no trabalho de Böttcher e Böttcher [37] são axialmente simétricas e não deveremos esperar encontrar bifurcações se não ocorrer uma quebra de simetria. Por outro lado, não é de excluir a possibilidade de soluções tridimensionais que descrevem modos mancha bifurcarem-se a partir de soluções axialmente simétricas que descrevem o modo difuso (e talvez também modos mancha).

Neste capítulo são calculados numericamente os pontos de bifurcação nos quais soluções tridimensionais que descrevem modos mancha bifurcam-se a partir de soluções axialmente simétricas que descrevem o modo difuso ou modos mancha. Tal cálculo é essencial, em particular, para a compreensão do padrão geral das características

tensão-corrente dos vários modos de transferência de corrente. Além disso, este cálculo fornece pontos de referência para eventuais modelações numéricas tridimensionais.

Para além de ser de interesse teórico, a determinação de pontos de bifurcação nos quais soluções tridimensionais bifurcam-se a partir de soluções axialmente simétricas deve ser também de considerável interesse tecnológico devido ao que se segue. Em muitas aplicações é preferível ter o cátodo a operar no modo difuso numa descarga de arco de alta pressão. As experiências indicam que o modo difuso é estável para altos valores da corrente de arco ("o modo difuso é favorecido por correntes altas"; ver, por exemplo, [25, 24]). Existem também considerações semelhantes de carácter teórico [99, 100]; note-se que o modo difuso é provavelmente o único modo possível a altas correntes (ver capítulo 3). À medida que a corrente diminui o modo difuso torna-se instável. Podemos esperar, de acordo com os trabalhos de Benilov [99, 100], que a perda de estabilidade ocorra no primeiro ponto de bifurcação, no qual uma solução tridimensional que descreve o primeiro modo mancha bifurca-se a partir da solução que descreve o modo difuso. Por conseguinte, o valor da corrente de arco correspondente ao primeiro ponto de bifurcação é visto como o limite de estabilidade do modo difuso, isto é, a corrente abaixo da qual o modo difuso torna-se instável.

Devemos realçar que os cálculos numéricos requeridos para encontrar os pontos de bifurcação nos quais soluções tridimensionais bifurcam-se a partir de soluções axialmente simétricas são bidimensionais e não tridimensionais como se poderia pensar. Por conseguinte, a abordagem desenvolvida neste capítulo para o cálculo do limite de estabilidade do modo difuso não é intensa do ponto de vista computacional e pode ser facilmente realizada num PC, sendo, portanto, adequada para procedimentos de engenharia.

## 4.2 Cálculo dos pontos de bifurcação

O modelo não linear do aquecimento de superfície que será considerado neste capítulo é o mesmo que foi descrito no capítulo 1 desta dissertação. No caso de uma distribuição tridimensional da temperatura no cátodo, o problema não linear com condições de fronteira para a equação de Laplace (problema (1.6), (1.7)) pode ser escrito na forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.1)$$

$$\Gamma_h : \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = q(\psi_w, U), \quad \Gamma_c : \quad \psi = 0. \quad (4.2)$$

$r, \varphi$  e  $z$  são coordenadas cilíndricas (estas coordenadas estão ilustradas na figura 1.1);  $r$  e  $z$  têm origem no centro da superfície frontal do cátodo e o eixo dos  $z$ 's é perpendicular

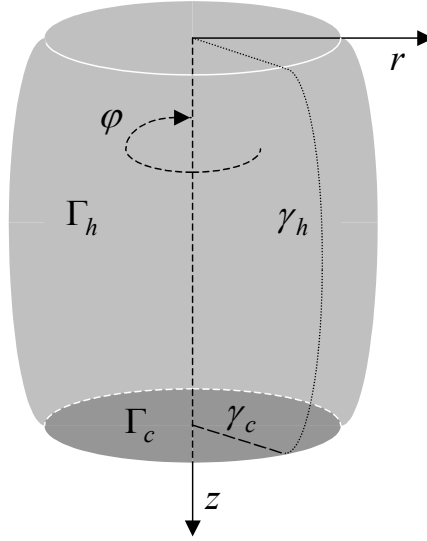


Figura 4.1: Esquema do modelo de um cátodo axialmente simétrico.  $\Gamma_c$ : base do cátodo, a qual é arrefecida por um fluido externo.  $\Gamma_h$ : superfícies frontal e lateral do cátodo, as quais estão em contacto com o plasma ou com o gás frio.

à superfície frontal do cátodo e direccionado para o interior do cátodo;  $n$  é uma direcção localmente ortogonal à superfície do cátodo e orientada para o exterior do cátodo.

#### 4.2.1 O método

Consideremos um cátodo axialmente simétrico e escolhamos a origem do sistema de coordenadas no centro da sua superfície frontal com o eixo dos  $z$ 's direccionado ao longo do eixo de simetria do cátodo e orientado para o interior do cátodo, conforme está ilustrado na figura 4.1. O problema considerado tem soluções axialmente simétricas,  $\psi = \psi(r, z)$ , as quais descrevem o modo difuso e modos mancha de transferência de corrente para o cátodo e ainda soluções tridimensionais,  $\psi = \psi(r, z, \varphi)$ , as quais descrevem modos mancha.

Seja  $\psi_0(r, z; U)$  uma solução axialmente simétrica do problema (4.1), (4.2). Designemos por  $U_i$  o valor da queda de tensão correspondente ao ponto de bifurcação no qual uma ou mais soluções tridimensionais bifurcam-se. As soluções na vizinhança deste ponto são procuradas na forma de uma série

$$\psi(r, \varphi, z; U) = \psi_0(r, z; U_i) + \varepsilon \psi_1(r, \varphi, z) + \dots \quad (4.3)$$

$\varepsilon$  é um pequeno parâmetro relacionado com  $U - U_i$  através da equação

$$U = U_i + \varepsilon \alpha_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \alpha_2, \quad (4.4)$$



onde três escolhas são possíveis:  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 = 1$  ou  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 = -1$ . A primeira escolha é apropriada no caso em que as soluções que bifurcam-se no ponto de bifurcação considerado existem quer para  $U$  abaixo quer para  $U$  acima de  $U_i$  e as perturbações descritas por estas soluções crescem na vizinhança do ponto de bifurcação proporcionalmente a  $U - U_i$  (bifurcação transcítica; ver, por exemplo, [101]). As segunda e terceira escolhas são apropriadas nos casos em que as soluções que se bifurcam existem no intervalo  $U \geq U_i$  (ou, respectivamente,  $U \leq U_i$ ), isto é, são supercríticas (ou subcríticas) e as perturbações descritas por estas soluções crescem na vizinhança do ponto de bifurcação proporcionalmente a  $\sqrt{U - U_i}$  (ou a  $\sqrt{U_i - U}$ ); bifurcação forquilha<sup>1</sup>.

O problema que governa a função  $\psi_1$  pode ser obtido derivando as equações (4.1) e (4.2) em ordem a  $\varepsilon$  e pondo  $\varepsilon = 0$ :

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0, \quad (4.5)$$

$$\Gamma_h : \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial n} - \frac{\partial q}{\partial \psi_w} \psi_1 = \frac{\partial q}{\partial U} \alpha_1, \quad \Gamma_c : \quad \psi_1 = 0. \quad (4.6)$$

As derivadas da função  $q = q(\psi_w, U)$  em cada ponto da superfície  $\Gamma_h$  são calculadas para  $\psi_w = \psi_0(r, z; U_i)|_{\Gamma_h}$ , isto é, para o valor local da temperatura da superfície no ponto de bifurcação e para  $U = U_i$ .

Uma vez que ocorre uma bifurcação no ponto considerado, o problema linear não homogéneo (4.5), (4.6) deve ter soluções não únicas. Eliminado o termo  $\frac{\partial q}{\partial U} \alpha_1$  no lado direito da primeira condição de fronteira (4.6) obtemos o correspondente problema homogéneo. Este último problema deve ter uma solução não trivial. Por outras palavras, devemos considerar o problema homogéneo como um problema de valores próprios onde a queda de tensão  $U_i$  é o parâmetro que desempenha o papel de valor próprio. Note-se que  $U_i$  é o único parâmetro de controle do problema homogéneo para um cátodo e um plasma dados.

O problema homogéneo acima descrito admite a separação da variável azimutal  $\varphi$  das variáveis  $r$  e  $z$ , isto é, admite soluções na forma

$$\psi_1(r, \varphi, z) = f(\varphi)F(r, z). \quad (4.7)$$

As funções  $f(\varphi)$  e  $F(r, z)$  satisfazem

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} + k^2 f = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} F + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \quad (4.9)$$

<sup>1</sup>Em inglês, esta bifurcação é designada por «pitchfork».

$$\gamma_h : \quad \frac{\partial F}{\partial n_1} - \frac{\partial q}{\partial \psi_w} F = 0, \quad \gamma_c : \quad F = 0. \quad (4.10)$$

onde  $k^2$  é uma constante de separação,  $\gamma_h$  e  $\gamma_c$  são as geratrizes das superfícies de revolução  $\Gamma_h$  e  $\Gamma_c$ , respectivamente, (ver figura 4.1) e  $n_1$  é uma direcção [pertencente ao plano  $\varphi = \text{const}$ ] localmente ortogonal a  $\gamma_h$  e orientada para o exterior do cátodo. Note-se que as geratrizes  $\gamma_h$  e  $\gamma_c$  são linhas pertencentes ao plano  $\varphi = \text{const}$  que, por rotação em torno do eixo dos  $z$ 's, produzem as superfícies  $\Gamma_h$  e  $\Gamma_c$ , respectivamente (ver figura 4.1). É conveniente dar uma indicação acerca do modo como a primeira das condições de fronteira (4.10) foi obtida. Para tal, começamos por reescrever a primeira condição de fronteira de (4.6) na forma

$$\vec{n} \cdot \nabla \psi_1 - \frac{\partial q}{\partial \psi_w} \psi_1 = 0, \quad (4.11)$$

onde  $\vec{n}$  é um vector unitário colinear com a direcção  $n$ . Como  $\vec{n}$  é ortogonal a  $\Gamma_h$  pode ser escrito na forma  $\vec{n} = (n_r, 0, n_z)$ . Assim, a equação (4.11) toma a forma

$$n_r \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + n_z \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial \psi_w} \psi_1 = 0. \quad (4.12)$$

Substituindo  $\psi_1$  pela expressão (4.7), temos

$$n_r \frac{\partial F}{\partial r} + n_z \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial \psi_w} F = 0. \quad (4.13)$$

Introduzindo um novo vector unitário  $\vec{n}_1 = (n_r, n_z)$  pertencente ao plano  $\varphi = \text{const}$  e perpendicular a  $\gamma_h$ , a equação (4.13) origina

$$\vec{n}_1 \cdot \nabla F - \frac{\partial q}{\partial \psi_w} F = 0, \quad (4.14)$$

com  $\nabla F$  pertencente ao plano  $\varphi = \text{const}$ . A equação (4.14) é precisamente a primeira das condições de fronteira (4.10).

Para que a função  $f(\varphi)$  [e, consequentemente,  $\psi_1(r, \varphi, z)$ ] seja unívoca,  $k$  tem de ser inteiro ou, sem perda de generalidade, natural. Por conseguinte, a procura dos pontos de bifurcação do problema tridimensional original é reduzida à resolução do problema de valores próprios linear axialmente simétrico (4.9), (4.10) para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , sendo a queda de tensão  $U_i$  o parâmetro que desempenha o papel de valor próprio. Este problema é resolvido sem grandes dificuldades.

A abordagem seguida para determinar os valores próprios do problema (4.9), (4.10) é semelhante à que foi desenvolvida por Benilov para determinar pontos de bifurcação numa descarga luminescente [102] e numa descarga de coroa num eléctrodo negativo [103]. O procedimento utilizado baseia-se na determinação do sinal do determinante do sistema de equações algébricas correspondente à versão discretizada do problema (4.9),

(4.10) perante uma variação de  $U$ . Assim, uma vez escolhida a geometria do cátodo e estabelecidos os parâmetros de controle do problema (4.9), (4.10), uma variação do sinal do determinante indica que houve passagem por um ponto de bifurcação.

Diferentes valores de  $k$  no problema (4.9), (4.10) correspondem à bifurcação de soluções que descrevem diferentes modos de transferência de corrente: as soluções que bifurcam-se nos pontos de bifurcação associados com  $k = 0$  são axialmente simétricas; as soluções que bifurcam-se nos pontos de bifurcação associados com  $k = 1$  descrevem modos com uma mancha não centrada na superfície frontal do cátodo ou, em termos mais gerais, com um sistema de manchas o qual é aperiódico em  $\varphi$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ ; as soluções que bifurcam-se nos pontos de bifurcação associados com  $k \geq 2$  descrevem modos com sistemas de manchas o qual é periódico em  $\varphi$  com o período  $2\pi/k$ .

A unicidade de uma solução é violada não apenas nos pontos de bifurcação, nos quais soluções essencialmente diferentes juntam-se ou bifurcam-se, mas também nos pontos de retorno, nos quais uma solução atinge o limite do seu intervalo de existência voltando em seguida para trás. Esta última situação ocorre no problema considerado quando a característica tensão-corrente,  $U = U(I)$ , de um determinado modo passa através de um ponto extremo,  $U = U_m$ : a solução que descreve este modo atinge, no ponto  $U = U_m$ , o limite do seu intervalo de existência voltando em seguida para trás. Este intervalo de existência é  $U \geq U_m$  ou  $U \leq U_m$  nos casos de mínimo ou máximo, respectivamente. Estritamente falando, na vizinhança de um ponto extremo o modo em questão é descrito por duas soluções diferentes que existem simultaneamente para  $U$  acima e abaixo de  $U_m$ . Uma destas soluções corresponde ao ramo decrescente da característica tensão-corrente e a outra ao ramo crescente. Por outras palavras, na vizinhança do ponto extremo a solução não é única e o extremo representa um ponto de bifurcação. No âmbito da teoria das bifurcações, este tipo de bifurcação é denominado bifurcação sela-nó ou de dobra<sup>2</sup>.

O procedimento para encontrar pontos de bifurcação acima descrito prevê bifurcações com  $k = 0$  em cada extremo da característica tensão-corrente de qualquer modo axialmente simétrico. Contudo, não ocorre bifurcação de soluções em tais pontos.

Se os valores próprios do problema de valores próprios (4.9), (4.10) são simples, então os valores próprios do problema homogêneo correspondente ao problema (4.5), (4.6) associados com  $k = 0$  são simples e os associados com  $k \geq 1$  são duplamente degenerados. Por conseguinte, uma solução bifurca-se em cada ponto de bifurcação associado com  $k = 0$ , excepto nos extremos da característica tensão-corrente. Uma família de soluções caracterizadas por um único parâmetro bifurca-se em cada ponto de bifurcação associado com  $k \geq 1$ ; contudo, uma vez que estas soluções são idênticas com a precisão de uma rotação, elas podem ser consideradas como uma solução simples

<sup>2</sup>Em inglês, esta bifurcação é designada por «fold».

com uma posição azimutal arbitrária do sistema de manchas.

É interessante comparar a técnica de encontrar pontos de bifurcação acima descrita com a que foi desenvolvida por Benilov [35]. Em [35], foram considerados cátodos de forma cilíndrica (com secção recta não necessariamente circular) com a superfície lateral electricamente e termicamente isolada. Naquele caso, o modo difuso é descrito por uma solução unidimensional  $\psi = \psi(z)$  e os pontos de bifurcação posicionados ao longo desta solução podem ser encontrados pela separação da varável  $z$  das variáveis  $r$  e  $\varphi$  no problema homogêneo correspondente ao problema (4.5), (4.6). Nesta dissertação, são considerados cátodos axialmente simétricos e os pontos de bifurcação posicionados ao longo das soluções  $\psi = \psi(r, z)$  que descrevem modos axialmente simétricos são encontrados pela separação da variável  $\varphi$  das variáveis  $r$  e  $z$ . Podemos verificar facilmente que no caso particular de um cátodo cilíndrico de secção recta circular com a superfície lateral electricamente e termicamente isolada, as variáveis  $r$  e  $z$  podem ser separadas no problema (4.9), (4.10), dando a presente teoria resultados analíticos idênticos aos obtidos por Benilov [35]. Neste caso, o problema (4.9), (4.10) toma a forma

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} F + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \quad (4.15)$$

$$\{r \leq R, z = 0\} : \quad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial \psi_w} F = 0, \quad (4.16)$$

$$\{r = R, 0 \leq z \leq h\} : \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad (4.17)$$

$$\{r \leq R, z = h\} : \quad F = 0, \quad (4.18)$$

onde  $R$  e  $h$  são o raio e a altura do cátodo, respectivamente. Escrevendo  $F(r, z)$  na forma

$$F(r, z) = y(r)g(z), \quad (4.19)$$

do problema (4.15)-(4.18) obtemos o problema

$$r^2 y'' + r y' + (\lambda^2 r^2 - k^2) y = 0, \quad (4.20)$$

$$r = R : \quad y' = 0, \quad (4.21)$$

para a função  $y(r)$ , sendo  $\lambda$  uma constante de separação, e o problema

$$g'' - \lambda^2 g = 0, \quad (4.22)$$

$$z = 0 : \quad g' + \frac{\partial q}{\partial \psi_w} g = 0, \quad (4.23)$$

$$z = h : \quad g = 0, \quad (4.24)$$

para a função  $g(z)$ .

O espectro do problema (4.20), (4.21) é dado pela fórmula

$$\lambda_{ks}R = j'_{k,s}, \quad (4.25)$$

onde  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$ , e  $j'_{k,s}$  é o  $s$ -ésimo zero da derivada da função de Bessel do primeiro tipo de ordem  $k$  (de acordo com a nomenclatura convencional [104],  $j'_{0,1} = 0$  e  $j'_{k,1} > 0$  para  $k \geq 1$ ). Numerando os valores próprios  $\lambda$  por ordem crescente, podemos escrever

$$\lambda_0 = \lambda_{01} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_{11} = \frac{j'_{1,1}}{R}, \quad \lambda_2 = \lambda_{21} = \frac{j'_{2,1}}{R}, \quad \lambda_3 = \lambda_{02} = \frac{j'_{0,2}}{R}, \quad \dots$$

onde  $j'_{1,1} = 1.841$ ,  $j'_{2,1} = 3.054$  e  $j'_{0,2} = 3.832$  [104].

A função que satisfaz a equação (4.22) com a condição de fronteira (4.24) é  $g(z) = \sinh[\lambda(h-z)]$ . Substituindo esta função no problema (4.22)-(4.24), obtemos a equação

$$\frac{\partial q}{\partial \psi} [\psi_w(U), U] = \lambda \coth(\lambda h), \quad (4.26)$$

onde  $\psi_w$  é o potencial de fluxo de calor na superfície frontal do cátodo (domínio  $\{r \leq R, z = 0\}$ ).

Os pontos de bifurcação posicionados ao longo da solução unidimensional  $\psi = \psi(z)$ , que descreve o modo difuso, são encontrados através da resolução da equação (4.26) para cada um dos valores de  $\lambda$  acima referidos; o valor de  $U$  para o qual (4.26) é satisfeita corresponde ao ponto de bifurcação associado com o valor de  $\lambda$  considerado. Os resultados (espectro e as funções próprias) acabados de descrever são idênticos aos obtidos no âmbito da teoria de bifurcações desenvolvida por Benilov [35].

O exemplo acabado de discutir indica que os valores próprios do problema (4.9), (4.10) não são necessariamente simples: vê-se neste exemplo que para cada valor de  $k$  existem diferentes soluções (associadas com diferentes valores de  $\lambda$ ).

#### 4.2.2 Resultados e discussão

Nesta secção são apresentados resultados do cálculo de pontos de bifurcação correspondentes a  $k = 0, 1$  e  $2$  posicionados ao longo do modo difuso e de modos mancha axialmente simétricos da descarga de arco num cátodo de tungsténio a operar num plasma de argon à pressão atmosférica. Foram considerados cátodos cilíndricos com a secção recta circular, o que significa que a geometria dos cátodos é especificada pelo seu raio  $R$  e pela sua altura  $h$ . Devemos realçar que os cátodos considerados não devem ser demasiado finos para que uma bifurcação com  $k = 2$  possa ocorrer no intervalo de queda de tensão considerado ( $U \leq 40$  V). Por conseguinte, nesta secção serão tratados cátodos com  $R = 2$  mm e  $h = 10$  mm.

As características tensão-corrente do modo difuso e do primeiro modo mancha axialmente simétrico são apresentadas na figura 4.2 pelas linhas a cheio e tracejada, respectivamente. Note-se que no capítulo 3 desta dissertação foi feita uma discussão detalhada acerca destas soluções. No entanto, relembramos que a solução que descreve o primeiro modo mancha axialmente simétrico compreende dois ramos, um ramo de baixa tensão e um ramo de alta tensão. Os pontos de bifurcação detectados ao longo desta solução por meio da abordagem desenvolvida na secção 4.2.1 são representados por círculos. Para cada uma das soluções existe um ponto de bifurcação associado com cada um dos valores de  $k$ . É interessante notar que é diferente a sequência dos pontos de bifurcação ao longo das duas soluções: enquanto temos  $U_0 < U_1 < U_2$  para os pontos de bifurcação posicionados na solução que descreve o modo difuso ( $U_0$ ,  $U_1$  e  $U_2$  são as tensões correspondentes aos pontos de bifurcação associados com  $k = 0$ ,  $k = 1$  e  $k = 2$ , respectivamente), temos  $U_0 < U_2 < U_1$  para os pontos de bifurcação posicionados na solução que descreve o modo mancha. Os pontos de bifurcação associados com  $k = 0$  encontrados para cada uma das soluções coincidem com o ponto de mínimo das respectivas características tensão-corrente. Isto está em conformidade com o que foi dito na secção 4.2.1 e não ocorre bifurcação nestes pontos. As soluções tridimensionais que bifurcam-se nos outros pontos de bifurcação estão representadas esquematicamente na figura 4.2 pelas linhas ponteadas de acordo com as considerações qualitativas estabelecidas por Benilov [35].

Nas figuras 4.3 e 4.5 são apresentadas as distribuições, ao longo da superfície do cátodo, das perturbações (sem tomar em conta o factor azimutal) que bifurcam-se nos pontos de bifurcação associados com  $k = 1$  e  $k = 2$ . Nestas figuras estão presentes também as distribuições do potencial de fluxo de calor  $\psi_0$  correspondente aos respectivos pontos de bifurcação. O intervalo  $0 \leq r + z \leq R$  nestas figuras corresponde à superfície frontal do cátodo,  $\{r \leq R, z = 0\}$ , enquanto o intervalo  $r + z \geq R$  corresponde à superfície lateral,  $\{r = R, z \geq 0\}$ . As distribuições de temperatura dos modos difuso e mancha nos pontos de bifurcação associados com  $k = 1$  e  $k = 2$  são apresentadas nas figuras 4.4 e 4.6. Nestas figuras são ainda apresentadas as distribuições de temperatura (levando em conta o factor azimutal) correspondentes à soma  $\psi_0(r, z) + \psi_1(r, \varphi, z)$  na vizinhança de cada um dos referidos pontos de bifurcação.

No caso do modo difuso (figuras 4.3, 4.4a e 4.4c), a função  $\psi_0(r, z)$  tem um máximo na margem da superfície frontal do cátodo (ver as respectivas distribuições da temperatura nas figuras 4.4a e 4.4c). A função  $\psi_1(r, \varphi, z)$  tem um ou dois máximos na margem da superfície frontal do cátodo nos caso  $k = 1$  e  $k = 2$ , respectivamente. Podemos esperar, portanto, que as estruturas das soluções que bifurcam-se a partir da solução que descreve o modo difuso sejam as seguintes: a solução que bifurca-se no ponto de bifurcação associado com  $k = 1$  deverá descrever um modo com uma mancha

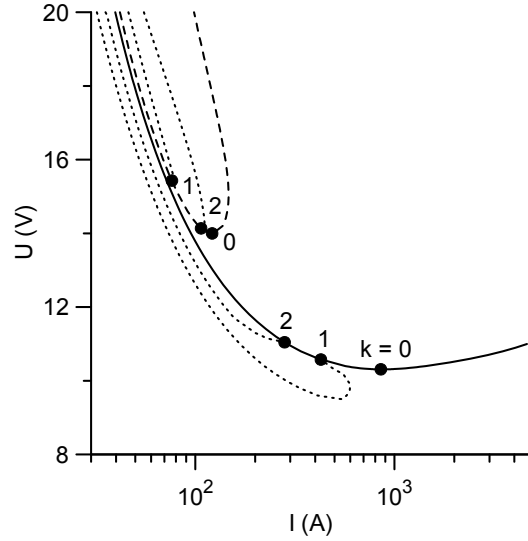


Figura 4.2: Características tensão-corrente e pontos de bifurcação. Linha a cheio: característica tensão-corrente do modo difuso. Linha tracejada: característica tensão-corrente do primeiro modo mancha axialmente simétrico. Linhas pontilhadas: representação esquemática das características tensão-corrente dos modos mancha tridimensionais. Círculos: pontos de bifurcação. Plasma de argon,  $p = 1$  atm,  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm.

situada na margem da superfície frontal do cátodo (ver figura 4.4b); a solução que bifurca-se no ponto de bifurcação associado com  $k = 2$  deverá descrever um modo com duas manchas opostas situadas na margem da superfície frontal do cátodo (ver figura 4.4d).

No caso do modo mancha axialmente simétrico (figuras 4.5, 4.6a e 4.6c), a função  $\psi_0$  tem dois máximos, um no centro e outro na margem da superfície frontal do cátodo (ver as respectivas distribuições da temperatura nas figuras 4.6a e 4.6c). A função  $\psi_1(r, \varphi, z)$  tem dois máximos. No caso  $k = 1$ , um dos máximos está posicionado na margem e o outro numa posição oposta ao primeiro algures entre a margem e o centro da superfície frontal do cátodo. No caso  $k = 2$ , os máximos estão em posições opostas situadas na margem da superfície frontal do cátodo. Podemos esperar, portanto, que as estruturas das soluções que bifurcam-se a partir da solução que descreve o modo mancha axialmente simétrico sejam as seguintes: a solução que bifurca-se no ponto de bifurcação associado com  $k = 1$  deverá descrever um modo com duas manchas opostas, uma delas situada na margem e a outra algures entre a margem e o centro da superfície frontal do cátodo (ver figura 4.6b); a solução que bifurca-se no ponto de bifurcação associado com  $k = 2$  deverá descrever um modo com duas manchas oposta situadas na margem da superfície frontal do cátodo (ver figura 4.6c).

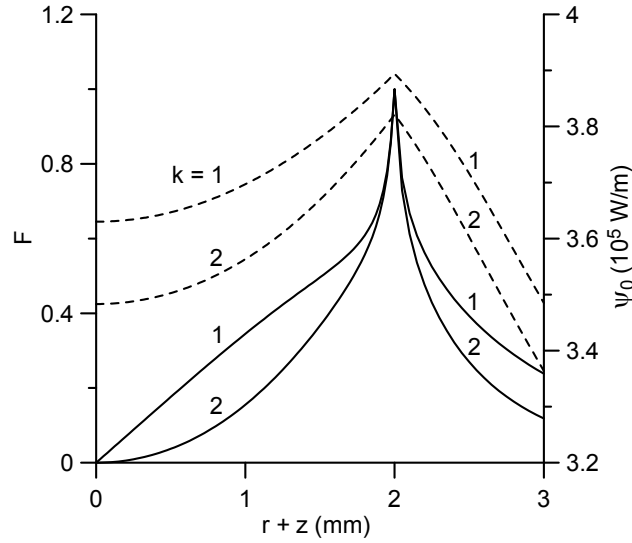


Figura 4.3: Linhas a cheio: distribuições das perturbações que ramificam-se a partir da solução correspondente ao modo difuso (unidades arbitrárias.) Linhas tracejadas: distribuições do potencial de fluxo de calor correspondente aos respectivos pontos de bifurcação. Plasma de argon,  $p = 1$  atm,  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm.

É de interesse considerar também cátodos com a superfície lateral electricamente e termicamente isolada. As características tensão-corrente do modo difuso e do primeiro modo mancha axialmente simétrico estão representadas na figura 4.7 pelas linhas a cheio e tracejada, respectivamente. Neste caso, o modo mancha axialmente simétrico bifurca-se a partir do modo difuso, isto é, existe um ponto no qual ambas as soluções tornam-se exactamente idênticas. Também presente na figura 4.7 estão os pontos de bifurcação determinados por meio da abordagem desenvolvida na secção 4.2.1. É de realçar que o cálculo numérico das posições dos pontos de bifurcação pertencentes ao modo difuso dá valores que coincidem com os que são calculados analiticamente por meio da teoria de bifurcações desenvolvida por Benilov [35], o que está de acordo com o que foi dito no final da secção 4.2.1.

Em contraste com o caso de um cátodo com uma superfície lateral activa, existem dois pontos de bifurcação associados com  $k = 0$  ao longo da solução que descreve o modo difuso. Um destes pontos coincide com o ponto de mínimo da característica tensão-corrente, não ocorrendo, portanto, bifurcação neste ponto. O outro ponto é aquele onde o modo mancha axialmente simétrico bifurca-se a partir do modo difuso; dito por outras palavras, é o ponto onde ambas as soluções se tornam exactamente idênticas. Como era de esperar, existem dois pontos de bifurcação associados com  $k = 0$  ao longo do modo mancha axialmente simétrico, um deles coincidindo com o



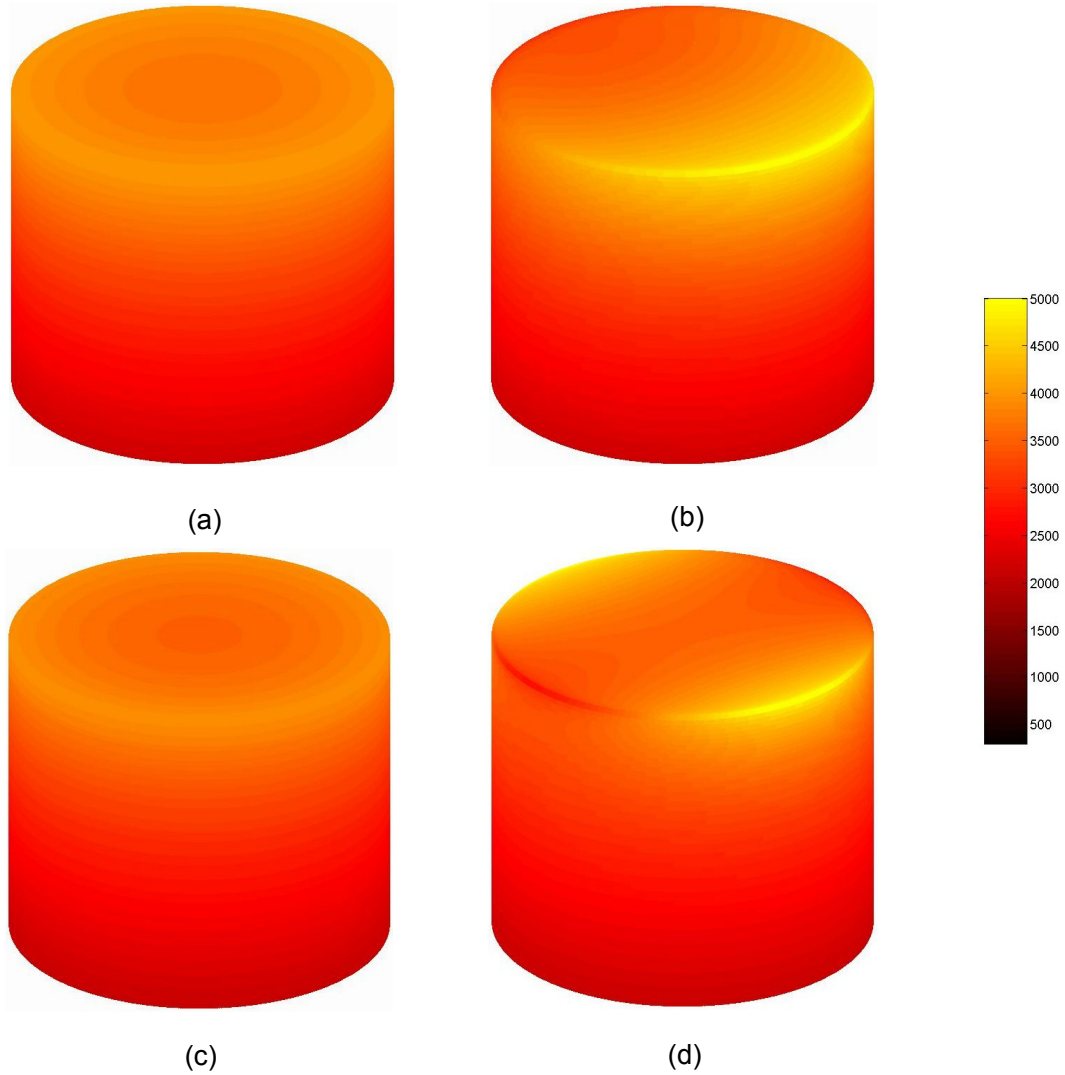


Figura 4.4: Distribuição da temperatura no cátodo para o modo difuso nos pontos de bifurcação (figuras a e c) e para o modo mancha na vizinhança dos pontos de bifurcação (figuras b e d). Figuras a e b:  $k = 1$ . Figuras c e d:  $k = 2$ . Plasma de argon,  $p = 1$  atm,  $R = 2$  mm e  $h = 10$  mm. Na barra de temperaturas, o valor da temperatura é expresso em kelvin.

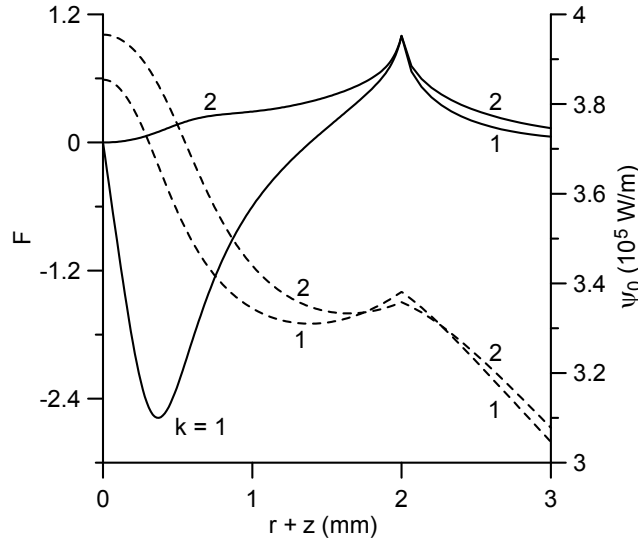


Figura 4.5: Linhas a cheio: distribuições das perturbações que ramificam-se a partir da solução correspondente ao modo mancha axialmente simétrico (unidades arbitrárias.) Linhas tracejadas: distribuições do potencial de fluxo de calor correspondente aos respectivos pontos de bifurcação. Plasma de argon,  $p = 1$  atm,  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm.

ponto de mínimo da característica tensão-corrente e o outro coincidindo com o ponto de bifurcação no qual o modo mancha axialmente simétrico bifurca-se a partir do modo difuso. Não foram detectadas bifurcações com  $k = 1$  ao longo do modo mancha axialmente simétrico. Existe um ponto de bifurcação associado com  $k = 2$ , o qual coincide com o ponto de mínimo da característica tensão-corrente. As soluções tridimensionais que bifurcam-se a partir do modo difuso ou do modo mancha axialmente simétrico estão representadas esquematicamente na figura 4.7 pelas linhas ponteadas.

Os resultados acima referidos confirmam a hipótese de que no caso de cátodos axialmente simétricos existem modos mancha tridimensionais que bifurcam-se a partir da solução axialmente simétrica que descreve o modo difuso. De facto, também existem modos mancha tridimensionais que bifurcam-se a partir de soluções que descrevem modos mancha axialmente simétricos. No caso de um cátodo com a superfície lateral isolada, isto significa que estão presentes bifurcações secundárias: soluções mancha tridimensionais bifurcam-se a partir da solução mancha axialmente simétrica, a qual, por sua vez, bifurca-se a partir da solução difusa unidimensional.

A estrutura geral das soluções estacionárias apresentada nas figuras 4.2 e 4.7 é semelhante à que foi estabelecida por Benilov [35] (ver figura 3.7 desta dissertação), sendo, no entanto, mais complexa devido às soluções mancha tridimensionais que bifurcam-se a partir da solução mancha axialmente simétrica.

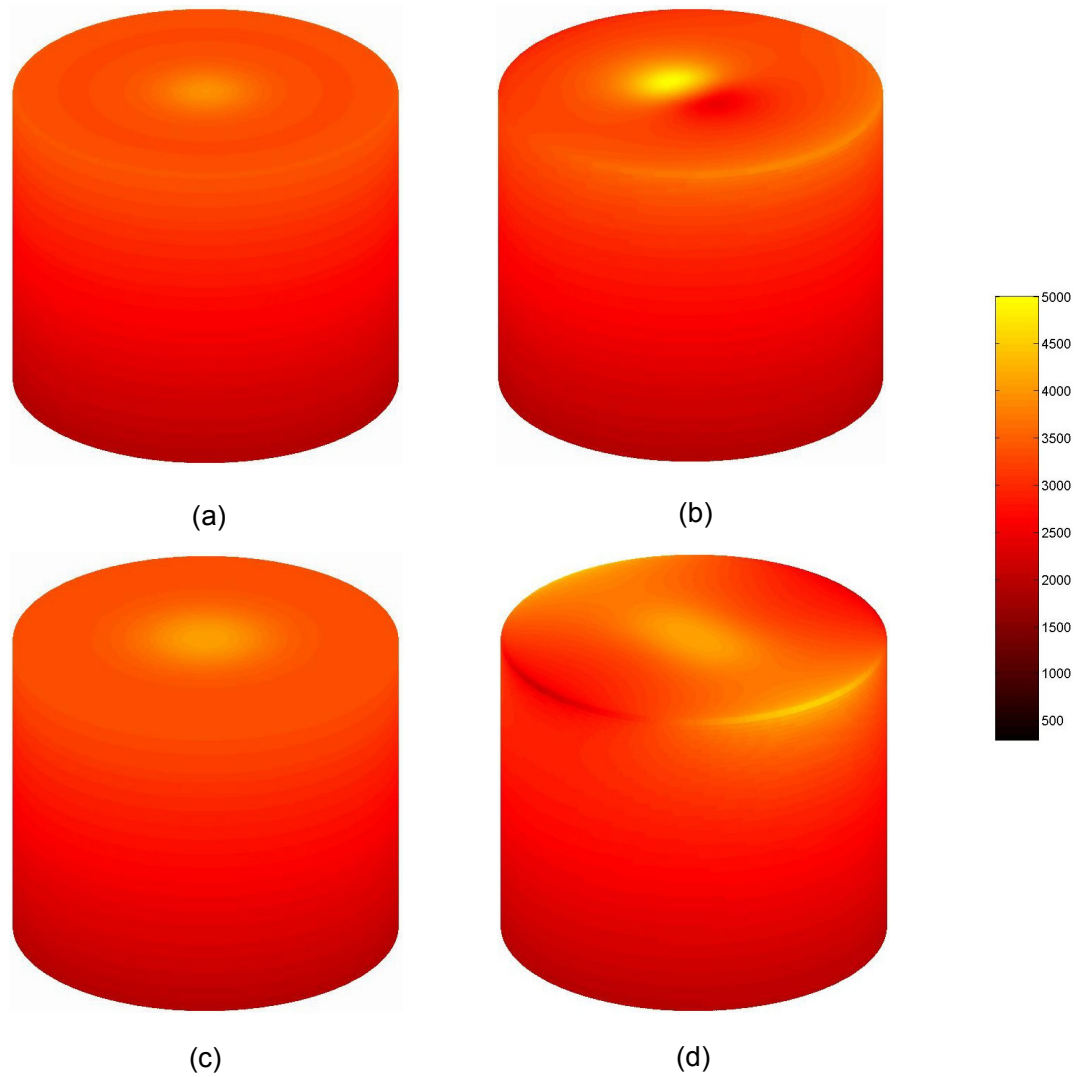


Figura 4.6: Distribuição da temperatura no cátodo para o modo mancha axialmente simétrico nos pontos de bifurcação (figuras a e c) e para o modo mancha na vizinhança dos pontos de bifurcação (figuras b e d). Figuras a e b:  $k = 1$ . Figuras c e d:  $k = 2$ . Plasma de argon,  $p = 1$  atm,  $R = 2$  mm e  $h = 10$  mm. Na barra de temperaturas, o valor da temperatura é expresso em kelvin.

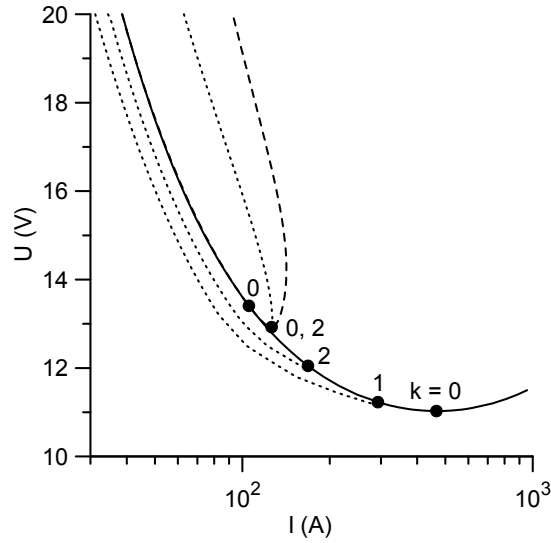


Figura 4.7: Características tensão-corrente e pontos de bifurcação para um cátodo com a superfície lateral isolada. Linha a cheio: característica tensão-corrente do modo difuso. Linha tracejada: característica tensão-corrente do primeiro modo mancha axialmente simétrico. Linhas pontilhadas: representação esquemática das características tensão-corrente dos modo mancha tridimensionais. Círculos: pontos de bifurcação. Plasma de argon,  $p = 1$  atm,  $R = 2$  mm,  $h = 10$  mm.

### 4.3 Considerações de estabilidade das soluções

No caso de um cátodo cilíndrico com a superfície lateral isolada, foi estabelecido na introdução desta dissertação que no regime difuso pertencente à secção decrescente (ou crescente) da característica tensão-corrente, a temperatura da superfície frontal do cátodo corresponde à secção crescente (ou decrescente) da dependência de  $q$  em relação a  $T_w$ . Por conseguinte, a secção decrescente da característica tensão-corrente do modo difuso é associada com a secção crescente da dependência de  $q$  em relação a  $T_w$  e *vice versa*. Esta afirmação é exacta no caso de um cátodo cilíndrico com a superfície lateral isolada. No caso de um cátodo cilíndrico com a superfície lateral activa, a afirmação permanece aproximadamente válida como foi referido no capítulo 3 desta dissertação.

Podemos dizer que existe um «feedback» positivo nos regimes difusos pertencentes à secção decrescente da característica tensão-corrente: uma vez que  $\partial q / \partial T_w > 0$ , um aumento local da temperatura da superfície do cátodo resultará num aumento local do fluxo de energia proveniente do plasma. Este aumento local do fluxo de energia irá causar um novo aumento da temperatura local e assim sucessivamente, isto é, desenvolver-se-á uma instabilidade térmica. O «feedback» positivo é contrariado

pela condução térmica, a qual tende a suavizar eventuais perturbações, isto é, tende a produzir um efeito estabilizador. Podemos esperar, de acordo com os trabalhos de Benilov [99, 100], que a condução térmica prevaleça nos regimes difusos correspondentes à secção da característica tensão-corrente compreendida entre o ponto de mínimo e o primeiro ponto de bifurcação, sendo estes regimes estáveis; nos regimes difusos correspondentes à secção da característica tensão-corrente situada à esquerda do primeiro ponto de bifurcação, o «feedback» positivo prevalece, sendo estes regimes instáveis. Os regimes difusos pertencentes à secção crescente da característica tensão-corrente são estáveis uma vez que o «feedback» é negativo em tais regimes (a derivada  $\partial q/\partial T_w$  é negativa no ponto mais quente da superfície do cátodo).

As considerações acima efectuadas podem ser resumidas como se segue. Designemos por  $I_1$  o valor da corrente de arco correspondente ao ponto de bifurcação pertencente ao modo difuso e associado com  $k = 1$  (por exemplo,  $I_1 \approx 430$  A nas condições da figura 4.2). De acordo com o que foi dito acima, este valor representa o limite de estabilidade da descarga difusa, isto é, a corrente abaixo da qual o modo difuso torna-se instável. Por outras palavras, podemos esperar que uma descarga com corrente controlada que inicialmente opera a altas correntes no modo difuso deverá transitar para o modo mancha quando a corrente desce abaixo de  $I_1$ .

A questão de saber qual o modo que ocorre para valores de corrente abaixo de  $I_1$  requer uma análise de estabilidade dos modos mancha, a qual não é uma tarefa fácil. Podemos tentar aplicar considerações quantitativas relacionadas com o sinal da derivada  $\partial q/\partial T_w$  no ponto mais quente da superfície do cátodo. Estes pontos estão representados na figura 4.8 para vários valores de  $U$  nos casos dos ramos de baixa e alta tensão do primeiro modo mancha axialmente simétrico e do modo difuso. Podemos ver que a derivada é negativa no caso do ramo de alta tensão do primeiro modo mancha axialmente simétrico e também para altos valores de  $U$  no caso do ramo de baixa tensão, o que pode constituir uma indicação de estabilidade.

Podemos também tentar aplicar considerações teóricas relativamente à estabilidade na vizinhança dos pontos de bifurcação [100]. De acordo com estas considerações, o primeiro modo mancha (o que bifurca-se no ponto de bifurcação pertencente ao modo difuso e associado com  $k = 1$ ; por outras palavras, o modo com uma mancha) é estável se é supercrítico e é instável se é subcrítico. Por outras palavras, se o primeiro modo mancha bifurca-se na região  $I > I_1$  como representado na figura 4.2, significando que é subcrítico, então é provavelmente instável na vizinhança do ponto de bifurcação. A transição entre o modo difuso e o primeiro modo mancha é descontínua (não estacionária) e acompanhada por histerese. Este cenário foi discutido por Benilov [35]; podemos dizer que o sistema experimenta uma perda dura de estabilidade<sup>3</sup> neste

<sup>3</sup>Em inglês, este tipo de perda de estabilidade é denominado «hard loss of stability»; ver, por

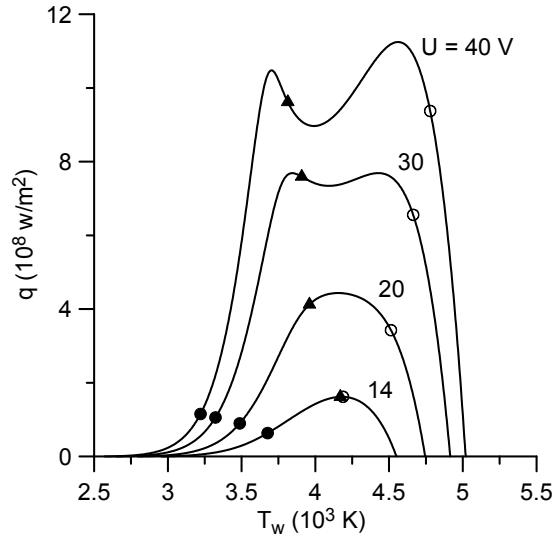


Figura 4.8: Densidade do fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo em função do valor local da temperatura da superfície do cátodo. Pontos: pontos mais quentes da superfície de um cátodo cilíndrico com  $R = 2 \text{ mm}$  e  $h = 10 \text{ mm}$  a operar no modo difuso (círculos cheios) e nos ramos de baixa tensão (triângulos) e alta tensão (círculos abertos) do primeiro modo mancha axialmente simétrico. Plasma de argon,  $p = 1 \text{ atm}$ .

caso. Se o primeiro modo mancha bifurca-se na região  $I < I_1$ , como representado na figura 4.7, significando que é supercrítico, a transição aparenta ser contínua; dizemos neste caso que o sistema experimenta uma perda suave de estabilidade<sup>4</sup>.

Devemos realçar que o limite de estabilidade acima discutido refere-se a cátodos com uma superfície uniforme ideal e a perturbações infinitamente pequenas. De facto, a transição para um modo mancha deve ocorrer a correntes algo maiores devido às não uniformidades da superfície do cátodo e ou a perturbações finitas. Por outras palavras, na realidade a transição difuso-mancha não ocorre sempre para o mesmo valor de corrente mas sim num determinado intervalo de corrente. Por conseguinte, a presente teoria dá, presumivelmente, o menor valor de corrente deste intervalo.

#### 4.4 Limite de estabilidade do modo difuso

Nesta secção são estudados os efeitos que a variação dos parâmetros de controle produz sobre o limite de estabilidade da descarga difusa em cátodos cilíndricos. O efeito

exemplo, [101].

<sup>4</sup>Em inglês, este tipo de perda de estabilidade é denominado «soft loss of stability»; ver, por exemplo, [101].

causado pela variação da geometria do cátodo é ilustrado pelas figuras 4.9 e 4.10. Podemos ver na figura 4.9 que os círculos que representam o limite de estabilidade são rapidamente deslocados no sentido das baixas correntes quando diminui o raio do cátodo, isto é, o limite de estabilidade decresce rapidamente. O limite de estabilidade é muito mais sensível a uma variação de  $R$  do que, por exemplo, a característica tensão-corrente quando está situado no intervalo de baixas correntes (altos valores de  $U$ ). Na verdade, as linhas que representam as características tensão-corrente para  $R = 0.985$  mm e para  $R = 0.975$  mm dificilmente são distinguíveis, o que é natural dada a pequena variação de  $R$ . Todavia, os círculos que representam os respectivos limites de estabilidade estão bem afastados um do outro; de facto, o limite de estabilidade diminuiu de 6.5 A para 3.0 A.

A figura 4.10 mostra que um aumento da altura do cátodo resulta numa diminuição do limite de estabilidade. Podemos ver, novamente, que o limite de estabilidade, quando situado no intervalo de baixas correntes, é muito mais sensível a uma variação da altura do cátodo do que a característica tensão-corrente: embora as características para  $h = 13$  mm e para  $h = 14.45$  mm sejam muito próximas uma da outra, o limite de estabilidade diminui consideravelmente.

A figura 4.11 (onde  $A$  é a função de trabalho) ilustra o efeito da variação da função de trabalho do material do cátodo sobre o limite de estabilidade. Uma pequena diminuição da função de trabalho origina um desvio fraco da característica tensão-corrente no sentido das baixas tensões e uma forte diminuição do limite de estabilidade.

A figura 4.12 ilustra os efeitos da pressão do plasma e do tipo de gás que produz o plasma. Um aumento da pressão de argon resulta num aumento do limite de estabilidade, sendo muito mais fraco o efeito produzido sobre a característica tensão-corrente (a característica tensão-corrente é fracamente desviada no sentido das baixas tensões). Uma mudança de argon para xenon e de xenon para mercúrio resulta num aumento do limite de estabilidade.

É interessante notar, na figura 4.13, que as distribuições das perturbações ao longo da superfície do cátodo, calculadas no limite de estabilidade, são muito semelhantes para todas as condições consideradas nesta secção. Isto pode ser atribuído ao facto dos cátodos considerados serem muito finos.

Vamos agora proceder a uma comparação dos resultados, acima mencionados, com a experiência. A interacção entre arcos de plasma de alta pressão e cátodos refractários tem sido estudada desde há já algumas décadas. Em particular, as primeiras observações do modo difuso de transferência de corrente remontam ao início dos anos de 1950 (ver o trabalho de Thouret *et al* [23]; ver também o trabalho de revisão de Neumann [25]). Contudo, só recentemente (ver, por exemplo, os trabalhos do grupo de

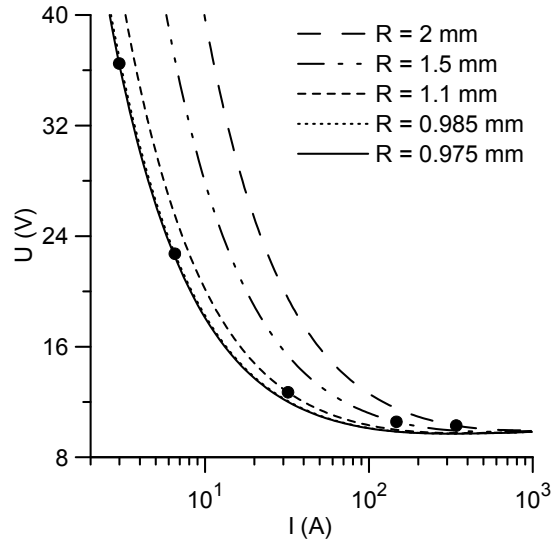


Figura 4.9: Características tensão-corrente do modo difuso e limites da sua estabilidade para diferentes valores do raio do cátodo. Linhas: características tensão-corrente. Círculos: limites de estabilidade. Plasma de Argon,  $p = 1$  atm,  $h = 14$  mm.

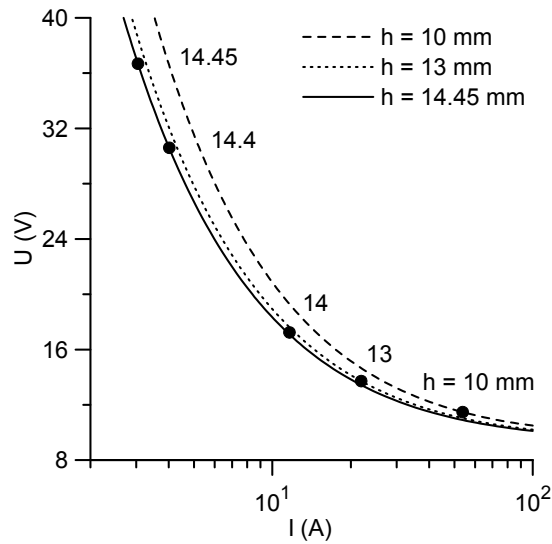


Figura 4.10: Características tensão-corrente do modo difuso e limites da sua estabilidade para diferentes valores da altura do cátodo. Linhas: características tensão-corrente. Círculos: limites de estabilidade. Plasma de Argon,  $p = 1$  atm,  $R = 1$  mm.



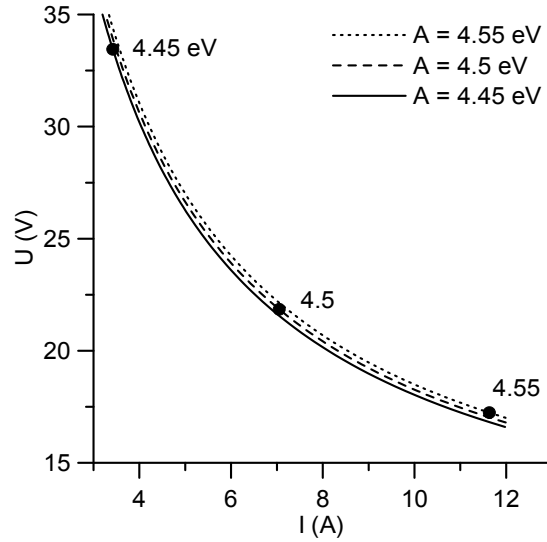


Figura 4.11: Características tensão-corrente do modo difuso e limites da sua estabilidade para diferentes valores da função de trabalho do material do cátodo. Linhas: características tensão-corrente. Círculos: limites de estabilidade. Plasma de argon,  $p = 1$  atm,  $R = 1$  mm,  $h = 14$  mm.

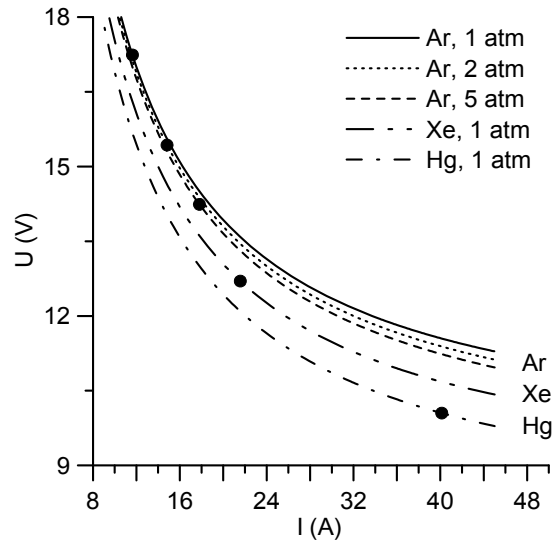


Figura 4.12: Características tensão-corrente do modo difuso e limites da sua estabilidade para diferentes valores da pressão do plasma e para diferentes gases. Linhas: características tensão-corrente. Círculos: limites de estabilidade.  $R = 1$  mm,  $h = 14$  mm.

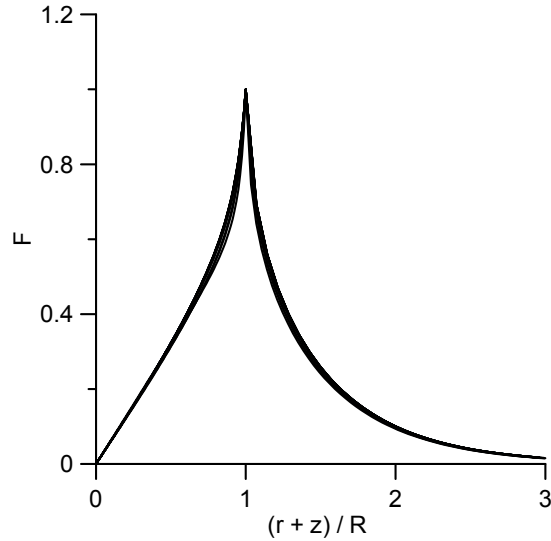


Figura 4.13: Distribuições das perturbações que ramificam-se a partir do modo difuso no limite de estabilidade nas condições das figuras 4.9-4.12 (unidades arbitrárias).

Mentel [72, 98, 86, 24]) começaram a aparecer dados experimentais dignos de confiança acerca das características eléctricas e térmicas da interacção arco-cátodo. Infelizmente, os dados recentes referem-se ou ao modo difuso ou ao modo mancha; até ao momento não foi relatada informação quantitativa acerca da transição do modo difuso para o modo mancha. Por conseguinte, a comparação dos resultados da presente teoria com os dados experimentais pode ser feita apenas a nível qualitativo.

Note-se que a ausência de informação experimental quantitativa digna de confiança acerca da transição difuso-mancha reside no facto de ser difícil reproduzir experimentalmente esta transição. Isto está em conformidade com a conclusão da presente teoria de que o limite de estabilidade do modo difuso é muito mais sensível às variações dos parâmetros de controle do que as características tensão-corrente ou regimes térmicos do modo difuso. Esperamos que a presente teoria possa fornecer um guia útil para a obtenção de dados experimentais reproduzíveis.

Um inventário acerca das observações mais antigas da transição difuso-mancha pode ser encontrado no trabalho de revisão de Neumann [25]. De acordo com este inventário e ainda segundo as observações experimentais do grupo de Mentel [24], a redução da superfície frontal do cátodo resulta numa diminuição do limite de estabilidade. O mesmo efeito está presente na modelação efectuada: uma diminuição do raio do cátodo resulta numa diminuição do limite de estabilidade; ver figura 4.9. De acordo com [25] e [24], uma diminuição do limite de estabilidade pode também ser obtida por meio de um aumento da resistência térmica do cátodo. O mesmo efeito

está presente na modelação efectuada: um aumento da altura do cátodo resulta numa diminuição do limite de estabilidade; ver figura 4.10. Um menor valor da função de trabalho do material do cátodo também resulta numa diminuição do limite de estabilidade [25]. O mesmo efeito está presente na modelação efectuada; ver figura 4.11. O limite de estabilidade num plasma de mercúrio é maior do que num plasma de xenon [23]. Como podemos ver na figura 4.12, este efeito é também descrito pela modelação efectuada. O efeito da pressão do gás sobre a transição difuso-mancha foi estudado em experiências recentes [24]. Foi encontrado que um aumento da pressão do gás resulta num aumento do limite de estabilidade. Mais uma vez, o mesmo efeito está presente na modelação efectuada; ver figura 4.12. Por conseguinte, as tendências na variação do limite de estabilidade previstas pela presente teoria estão em conformidade com as observações experimentais.

## **4.5 Conclusões**

Foi desenvolvida uma abordagem para o cálculo de pontos de bifurcação nos quais soluções tridimensionais bifurcam-se a partir de soluções axialmente simétricas. Foram apresentados resultados da modelação numérica efectuada para o caso de um cátodo de tungsténio, de forma cilíndrica, a operar em plasmas de alta pressão. Foi encontrado que as soluções tridimensionais bifurcam-se não apenas a partir da solução axialmente simétrica que descreve o modo difuso de transferência de corrente, mas também a partir da solução que descreve o primeiro modo mancha axialmente simétrico. Foram detectados dois pontos de bifurcação em cada umas das soluções. As soluções tridimensionais que bifurcam-se nestes pontos descrevem diferentes tipos de modos mancha: modo com uma mancha situada na margem da superfície frontal do cátodo; modo com duas manchas opostas situadas na margem da superfície frontal do cátodo; modo com duas manchas opostas, uma delas situada na margem e a outra algures entre a margem e o centro da superfície frontal do cátodo. Em geral, o padrão das soluções é bastante complexo.

O valor da corrente de arco correspondente ao primeiro ponto de bifurcação posicionado na solução axialmente simétrica que descreve o modo difuso é visto como sendo representativo do limite de estabilidade do modo difuso, isto é, a corrente abaixo da qual o modo difuso torna-se instável. Foi analisado o efeito que a variação dos parâmetros de controle (raio e altura do cátodo, função de trabalho do material do cátodo e tipo e pressão do gás que produz o plasma) produz no limite de estabilidade do modo difuso. Foi encontrado que o comportamento do limite de estabilidade sob as referidas variações está em concordância com as tendências observadas experimentalmente. Foi encontrado que o limite de estabilidade é muito mais sensível às variações dos

parâmetros de controle do que a característica tensão-corrente ou regime térmico do modo difuso, sendo o efeito mais forte produzido pelas variações das dimensões do cátodo e da função de trabalho do material do cátodo. Isto está em concordância com a tendência geral de que a transição do modo difuso para o modo mancha é de difícil reprodução nas experiências.

Esperamos que a abordagem desenvolvida neste capítulo forneça um guia útil para os experimentalistas. A conclusão de que o limite de estabilidade é muito mais sensível às variações dos parâmetros de controle do que a característica tensão-corrente ou regime térmico do modo difuso deve ser importante do ponto de vista tecnológico.

A abordagem desenvolvida neste capítulo para o cálculo do limite de estabilidade não é intensa do ponto de vista computacional e pode ser realizada facilmente num PC, sendo, portanto, adequada para aplicações de engenharia.

## Capítulo 5

# Considerações finais

Os resultados alcançados nesta dissertação poderão ser vistos como peças chave para a compreensão do problema da transferência de corrente para cátodos refractários de descargas de arco de alta pressão. Nestas considerações finais, é feita uma apresentação resumida de tais resultados e ainda uma consideração sobre algumas implicações futuras relativamente à sua aplicação.

### 5.1 Resultados

A transferência de corrente para cátodos refractários de descargas de arco de alta pressão foi estudada com base na resolução da equação da condução térmica no corpo do cátodo suplementada com uma condição de fronteira que especifica a densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo, sendo esta densidade uma função do valor local da temperatura da superfície do cátodo e da queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo. Esta abordagem permite obter uma descrição completa da interacção plasma-cátodo.

A função que descreve a densidade de fluxo de energia proveniente do plasma para a superfície do cátodo foi construída a partir da reconsideração de um modelo já existente da camada de plasma junto ao cátodo. Foram identificados os mecanismos responsáveis pela não monotonia desta função. Para resolver a equação da condução térmica no corpo do cátodo foi utilizada uma abordagem numérica iterativa, a qual inclui na sua estrutura um método directo eficaz para resolver as equações da malha.

Foi feita uma modelação completa da lâmpada de arco experimental do grupo de Mentel em Bochum, tendo-se obtido uma boa concordância dos resultados numéricos com os dados experimentais referentes à medição de diferentes grandezas eléctricas e térmicas.

Foram calculados vários modos bidimensionais (axialmente simétricos) de trans-

ferência de corrente para cátodos refractários de descargas de arco de alta pressão: modo difuso, modo mancha e mancha solitária. No caso do modo mancha, foi obtida a solução completa, a qual inclui dois ramos: ramo de baixa tensão e ramo de alta tensão.

O estudo da mancha solitária permitiu estabelecer uma estimativa, com uma precisão muito aceitável, da temperatura no interior da mancha sem ser necessário resolver a equação da condução térmica no corpo do cátodo.

Foi calculado o comportamento assintótico das soluções para cátodos finitos no limite das altas correntes, o qual foi confirmado pelas modelações numéricas efectuadas.

Foi mostrado que a mancha solitária num cátodo plano infinito representa a forma limite do ramo de alta tensão do modo mancha num cátodo finito.

A questão da distinção entre o modo difuso e o modo mancha foi considerada, tendo sido estabelecida uma definição para cada um deles.

Foi desenvolvida uma abordagem numérica que permitiu calcular pontos de bifurcação nos quais soluções tridimensionais que descrevem modos mancha bifurcam-se a partir de soluções axialmente simétricas (bidimensionais) que descrevem o modo difuso ou modos mancha.

Com base na abordagem desenvolvida para calcular pontos de bifurcação, foi estabelecido um padrão geral para as características tensão-corrente de vários modos de transferência de corrente para cátodos refractários em descargas de arco de alta pressão.

Foi definido o limite de estabilidade do modo difuso e analisado o efeito que as variações dos parâmetros de controle (dimensões do cátodo, função de trabalho do material do cátodo, gás que produz o plasma e sua pressão) têm sobre ele. O efeito detectado está de acordos com as tendências observadas experimentalmente. Foi encontrado que o limite de estabilidade do modo difuso é mais sensível às variações dos parâmetros de controle do que as suas características tensão-corrente. Isto explica o facto da transição difuso-mancha ser de difícil reprodução nas experiências.

## 5.2 Implicações

É de esperar que o modelo desenvolvido no âmbito desta dissertação para descrever a interacção plasma-cátodo possa, num futuro próximo, ser incorporado num esquema geral destinado à modelação da totalidade do sistema arco-eléctrodos numa descarga de arco de alta pressão.

Os resultados sobre a mancha solitária poderão ser úteis na construção de um esquema para simular descargas de arco em vácuo. Para tal, será necessário fazer modificações na parte da solução respeitante ao plasma.

Os resultados sobre pontos de bifurcação podem servir para construir aproximações iniciais para a modelação de modos mancha tridimensionais.

É de esperar que os resultados do cálculo de pontos de bifurcação possam constituir um guia útil para os experimentalistas.

A conclusão de que o limite de estabilidade do modo difuso é muito mais sensível às variações dos parâmetros de controle do que as suas características tensão-corrente e o regime térmico do modo difuso poderá ter importância tecnológica.

Sendo a abordagem destinada ao cálculo do limite de estabilidade do modo difuso facilmente implementada num PC, é de esperar que seja adequada para aplicações de engenharia.

## Apêndice A

# Resolução numérica da equação da condução térmica no interior do cátodo

É extensa a literatura onde podem ser encontrados métodos de resolução numérica de equações diferenciais parciais do tipo elíptico; ver, por exemplo, os livros de Press *et al* [73], de Ames [105], de Samarskii e Nikolaev [75, 106] e de Samarskii e Vabishchevich [76, 107]. Neste apêndice fazemos uma apresentação abreviada das questões consideradas essenciais para a implementação da abordagem numérica utilizada para resolver o problema não linear com condições de fronteira (2.26)-(2.29) (ver capítulo 2).

### A.1 Linearização do problema

Como já foi referido no capítulo 2, o problema (2.26)-(2.29) é resolvido nesta dissertação no caso de um cátodo cilíndrico de secção recta circular com uma distribuição de temperatura axialmente simétrica. O domínio de cálculo é reduzido ao domínio rectangular  $ABCD$  ilustrado na figura A.1. Vamos escrever o problema (2.26)-(2.29) na forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$AB : \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -q(\psi_w, U), \quad (\text{A.2})$$

$$BC : \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = q(\psi_w, U), \quad (\text{A.3})$$

$$CD : \quad \psi = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$AD : \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (\text{A.5})$$



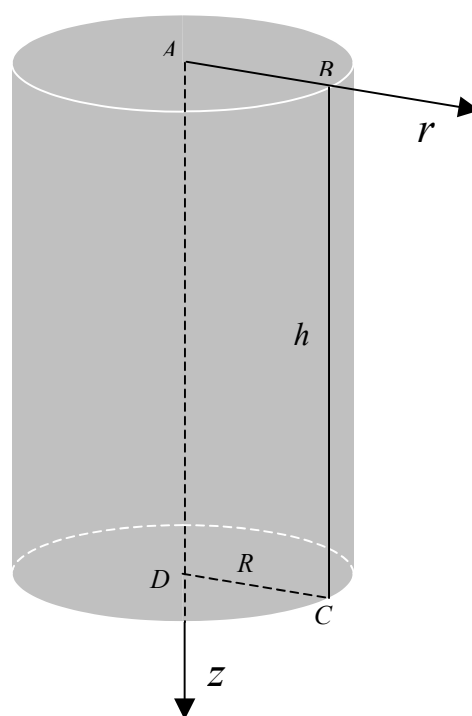


Figura A.1: Geometria dos cátodos modelados.  $ABCD$ : domínio de cálculo considerado na resolução do problema da transferência de corrente.  $R$  e  $h$  representam o raio e a altura do cátodo, respectivamente.

A resolução numérica de problemas elípticos não lineares faz-se por meio de um processo iterativo. Em cada iteração é resolvido um problema linear que é obtido através da linearização do problema original. No nosso caso, a linearização do problema (A.1)-(A.5) reduz-se à linearização das condições de fronteira (A.2) e (A.3) existentes nas superfícies frontal e lateral do cátodo, respectivamente. Esta linearização é feita pelo método de Newton, ou seja, as condições de fronteira (A.2) e (A.3) são escritas na forma

$$AB : \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = - \left[ q(\tilde{\psi}_w, U) + (\psi_w - \tilde{\psi}_w) \frac{\partial q}{\partial \psi}(\tilde{\psi}_w, U) \right], \quad (\text{A.6})$$

$$BC : \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = q(\tilde{\psi}_w, U) + (\psi_w - \tilde{\psi}_w) \frac{\partial q}{\partial \psi}(\tilde{\psi}_w, U), \quad (\text{A.7})$$

onde  $\tilde{\psi}_w$  representa o valor de  $\psi_w$  na iteração anterior.

Nos cálculos efectuados nesta dissertação, as iterações terminam quando é atingido o seguinte critério de convergência: as iterações terminam quando em todos os pontos do domínio de cálculo é verificada a condição

$$\left| \frac{\psi}{\tilde{\psi}} - 1 \right| \leq 10^{-6}. \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Equações em diferenças finitas

Na resolução do problema (A.1)-(A.5) linearizado, o domínio contínuo  $ABCD$  representado na figura A.1 é substituído por uma malha discreta. Associados aos diferentes modos mancha de transferência de corrente estudados nesta dissertação existem estados que possuem altos gradientes de temperatura. Por essa razão será considerada uma malha discreta não uniforme, conforme está ilustrado na figura A.2. A malha contém  $N + 1$  nodos ao longo da direcção radial,  $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_i < r_{i+1} < \dots < r_{N-1} < r_N = R$ , e  $M + 1$  nodos ao longo da direcção axial,  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_j < z_{j+1} < \dots < z_{M-1} < z_M = h$ .

As derivadas presentes na equação (A.1) são aproximadas pelas seguintes fórmulas com diferenças finitas (ver, por exemplo, o livro de Samarskii e Nikolaev [75])

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{r_i - r_{i-1}} + \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{r_{i+1} - r_i} \right), \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \simeq \frac{2}{r_{i+1} - r_{i-1}} \left( \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{r_{i+1} - r_i} - \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{r_i - r_{i-1}} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \simeq \frac{2}{z_{j+1} - z_{j-1}} \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{z_{j+1} - z_j} - \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{z_j - z_{j-1}} \right), \quad (\text{A.11})$$

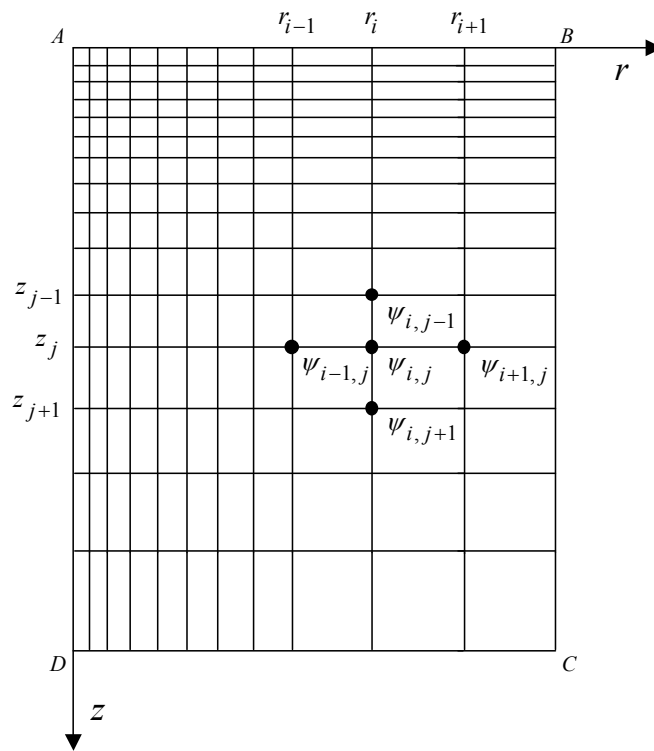


Figura A.2: Malha numérica correspondente ao domínio de cálculo ( $ABCD$ ) considerado na resolução do problema da transferência de corrente.

onde  $\psi_{i,j}$  é o valor de  $\psi$  no nodo  $(i, j)$ , isto é,  $\psi_{i,j} = \psi(r_i, z_j)$  e os índices  $i$  e  $j$  variam nos intervalos  $1 \leq i \leq N - 1$  e  $1 \leq j \leq M - 1$ , respectivamente.

As fórmulas (A.9)-(A.11) têm uma aproximação da ordem do passo, no caso de uma rede não uniforme, e da ordem do quadrado do passo no caso de uma rede uniforme. Esta segunda propriedade é essencial especialmente no caso do modo difuso, onde é possível usar uma rede uniforme. Por isso, é conveniente escrever também as condições de fronteira (A.2)-(A.5) com uma aproximação do quadrado do passo. Como exemplo vamos considerar a fronteira  $AB$  representada na figura A.2. Vamos introduzir pontos fora do domínio de cálculo com as coordenadas  $(r_i, -z_1)$  com  $i = 0, \dots, N$ . A derivada  $\partial\psi/\partial z$  é aproximada por uma fórmula semelhante a (A.9)

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\psi_{i,0} - \psi_{i,-1}}{z_0 - z_{-1}} + \frac{\psi_{i,1} - \psi_{i,0}}{z_1 - z_0} \right). \quad (\text{A.12})$$

Uma vez que a fórmula (A.12) contém nodos que não pertencem ao domínio de cálculo, torna-se necessário escrever ainda a discretização da equação (A.1) na fronteira  $AB$  de modo a eliminar os nodos exteriores.

O mesmo procedimento é usado para cada uma das condições de fronteira (A.3)-(A.5). Nos nodos pertencentes ao eixo do cátodo, fronteira  $AD$ , o segundo termo da equação (A.1) é indeterminado. Esta indeterminação é levantada usando a regra de L'Hospital

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial\psi}{\partial r} \right)}{\frac{\partial}{\partial r}(r)} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}. \quad (\text{A.13})$$

### **A.3 Resolução das equações em diferenças finitas**

A resolução do sistema de equações em diferenças finitas correspondente ao problema (A.1)-(A.5) linearizado pode ser feita, em princípio, utilizando um método iterativo, um método rápido ou um método directo. Tal como foi mencionado no capítulo 2, por um lado, métodos rápidos tais como FFT, CR e FACR não são aplicáveis devido às variáveis não serem separáveis, por outro lado, verificou-se que métodos iterativos do tipo da sobre-relaxação sucessiva não são robustos para resolver o nosso problema. Por conseguinte, nesta dissertação o sistema de equações em diferenças finitas foi resolvido utilizando um método directo especial (ver o livro de Samarskii [74]) que a seguir se explica.

O método directo escolhido tira partido do facto do sistema de equações em diferenças finitas que define o nosso problema ter uma estrutura que leva a que não entrem mais do que três camadas em cada iteração; uma camada é constituída pelo conjunto de nodos com o mesmo valor de  $j$ . Este sistema pode ser escrito na seguinte forma

vectorial

$$\hat{B}^{(1)} \vec{X}^{(1)} + \hat{C}^{(1)} \vec{X}^{(2)} = \vec{r}^{(1)}, \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{A}^{(j)} \vec{X}^{(j-1)} + \hat{B}^{(j)} \vec{X}^{(j)} + \hat{C}^{(j)} \vec{X}^{(j+1)} = \vec{r}^{(j)}, \quad j = 2, 3, \dots, M-1, \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{A}^{(M)} \vec{X}^{(M-1)} + \hat{B}^{(M)} \vec{X}^{(M)} = \vec{r}^{(M)}, \quad (\text{A.16})$$

onde  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são matrizes de dimensão  $N \times N$  e  $\vec{X}$  e  $\vec{r}$  são vectores coluna com  $N$  elementos cada um. Os elementos das matrizes  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são determinados a partir do sistema de equações em diferenças finitas. Os elementos do vector  $\vec{X}^{(j)}$  são os valores do potencial de fluxo de calor  $\psi$  nos nodos pertencentes à camada  $j$  em questão; dito por outras palavras, o elemento  $X_k^{(j)}$  do vector  $\vec{X}^{(j)}$  é igual ao valor do potencial de fluxo de calor no nodo  $(k, j)$ , isto é,  $X_k^{(j)} = \psi_{k,j}$ .

O sistema (A.14)-(A.16) pode ser escrito na forma quase triangular

$$\vec{X}^{(j)} = \hat{\alpha}^{(j)} \vec{X}^{(j+1)} + \hat{\beta}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, M-1, \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{A}^{(M)} \vec{X}^{(M-1)} + \hat{B}^{(M)} \vec{X}^{(M)} = \vec{r}^{(M)}, \quad (\text{A.18})$$

onde as matrizes  $\hat{\alpha}^{(j)}$  e  $\hat{\beta}^{(j)}$  são determinadas como a seguir se explica.

Multiplicando ambos os membros da equação (A.14) pela matriz inversa de  $\hat{B}^{(1)}$ , obtemos

$$\vec{X}^{(1)} = -\frac{\hat{C}^{(1)}}{\hat{B}^{(1)}} \vec{X}^{(2)} + \frac{\vec{r}^{(1)}}{\hat{B}^{(1)}}. \quad (\text{A.19})$$

A equação (A.17) com  $j = 1$  toma a forma

$$\vec{X}^{(1)} = \hat{\alpha}^{(1)} \vec{X}^{(2)} + \hat{\beta}^{(1)}. \quad (\text{A.20})$$

Comparando (A.19) com (A.20) resulta

$$\hat{\alpha}^{(1)} = -\frac{\hat{C}^{(1)}}{\hat{B}^{(1)}}, \quad \hat{\beta}^{(1)} = \frac{\vec{r}^{(1)}}{\hat{B}^{(1)}} \quad (\text{A.21})$$

Se para um determinado  $j$  ( $2 \leq j \leq M-1$ ) são conhecidas as matrizes  $\hat{\alpha}^{(j-1)}$  e  $\hat{\beta}^{(j-1)}$ , a equação (A.17) permite escrever a seguinte expressão para  $\vec{X}^{(j-1)}$

$$\vec{X}^{(j-1)} = \hat{\alpha}^{(j-1)} \vec{X}^{(j)} + \hat{\beta}^{(j-1)}. \quad (\text{A.22})$$

Se na equação (A.15) substituirmos  $\vec{X}^{(j-1)}$  pela expressão (A.22) e multiplicarmos ambos os membros da equação resultante pela matriz inversa de  $(\hat{B}^{(j)} + \hat{A}^{(j)} \hat{\alpha}^{(j-1)})$ , resulta

$$\hat{\alpha}^{(j)} = -\frac{\hat{C}^{(j)}}{\hat{B}^{(j)} + \hat{A}^{(j)} \hat{\alpha}^{(j-1)}}, \quad \hat{\beta}^{(j)} = \frac{\vec{r}^{(j)} - \hat{A}^{(j)} \hat{\beta}^{(j-1)}}{\hat{B}^{(j)} + \hat{A}^{(j)} \hat{\alpha}^{(j-1)}}, \quad j = 2, 3, \dots, M-1. \quad (\text{A.23})$$

Uma vez conhecidas as matrizes (A.23), podemos resolver a equação (A.17) com  $j = M-1$  juntamente com a equação (A.18) de modo a determinar os vectores  $\vec{X}^{(M-1)}$  e  $\vec{X}^{(M)}$

$$\vec{X}^{(M-1)} = \hat{\alpha}^{(M-1)} \frac{\vec{r}^{(M)} - \hat{A}^{(M)} \hat{\beta}^{(M-1)}}{\hat{B}^{(M)} + \hat{A}^{(M)} \hat{\alpha}^{(M-1)}} + \hat{\beta}^{(M-1)} \quad (\text{A.24})$$

$$\vec{X}^{(M)} = \frac{\vec{r}^{(M)} - \hat{A}^{(M)} \hat{\beta}^{(M-1)}}{\hat{B}^{(M)} + \hat{A}^{(M)} \hat{\alpha}^{(M-1)}}. \quad (\text{A.25})$$

Utilizando a equação (A.17) podemos determinar todos os restantes vectores,  $\vec{X}^{(M-2)}$ ,  $\vec{X}^{(M-3)}$ , ...,  $\vec{X}^{(1)}$ , de modo sucessivo inverso. Completa-se, assim, a resolução do sistema (A.14)-(A.16).

O cálculo das matrizes  $\hat{\alpha}^{(j)}$  e  $\hat{\beta}^{(j)}$  definidas por (A.21) e (A.23) requer que se conheça as matrizes inversas presentes nas definições de  $\hat{\alpha}^{(j)}$  e  $\hat{\beta}^{(j)}$ . No entanto, para tornar o cálculo de  $\hat{\alpha}^{(j)}$  e  $\hat{\beta}^{(j)}$  o mais eficiente possível, evitou-se calcular as referidas matrizes inversas. Assim, dadas as matrizes  $\hat{G}$  e  $\hat{T}$  o produto da matriz inversa de  $\hat{G}$  pela matriz  $\hat{T}$ ,  $\hat{G}^{-1}\hat{T}$ , foi calculado com base no procedimento sugerido no livro de Press *et al* [73]: primeiro é feita a factorização  $LU$  da matriz  $\hat{G}$  e em seguida aplicada a substituição inversa com as colunas da matriz  $\hat{T}$ .

## A.4 Aproximações iniciais

Uma vez que o método de Newton é muito sensível à aproximação inicial e ainda a que a aproximação inicial utilizada determina a solução para a qual as iterações convergem, vamos, nesta secção, dar algumas indicações relativas à construção das aproximações iniciais usadas nesta dissertação.

### A.4.1 Modo difuso

Como já foi mencionado na introdução desta dissertação, no caso de um cátodo cilíndrico com a superfície lateral isolada, o problema (A.1)-(A.5) tem a solução unidimensional

$$\psi = \left(1 - \frac{z}{h}\right) \psi_w, \quad (\text{A.26})$$

que descreve o modo difuso;  $\psi_w = \psi_w(U)$  é o valor do potencial de fluxo de calor na superfície frontal do cátodo, o qual é governado pela equação transcendente

$$\frac{\psi_w}{h} = q(\psi_w, U). \quad (\text{A.27})$$

A equação (A.27) é resolvida facilmente pelo método de Newton. Dependendo do valor de  $U$ , a equação (A.27) tem duas soluções, uma pertencente ao ramo crescente e outra

ao ramo decrescente da dependência  $q(\psi_w)$  para um dado valor de  $U$ ; ver figura 1.2c. Estas soluções podem ser usadas como aproximações iniciais para resolver o problema (A.1)-(A.5) no caso de um cátodo com a superfície lateral activa. Para tal, a solução (A.26) correspondente a cada um dos ramos é usada como aproximação inicial e a condição de fronteira (A.3) é escrita na forma

$$BC : \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = sq(\psi_w, U), \quad (\text{A.28})$$

onde  $s$  é um parâmetro adimensional que toma valores no intervalo  $[0, 1]$ ;  $s = 0$  significa que a superfície lateral é isolada e  $s = 1$  significa que a superfície lateral é activa. Variando lentamente o valor de  $s$  de 0 até 1 podemos adicionar lentamente a densidade de fluxo de energia à superfície lateral, o que permite, quando  $s = 1$ , obter a solução para o caso de um cátodo com a superfície lateral activa. Variando  $U$  e usando cada uma destas soluções como aproximação inicial para o valor de  $U$  seguinte e assim sucessivamente, contruimos os dois ramos da característica tensão-corrente do modo difuso.

#### **A.4.2 Modo mancha axialmente simétrico**

##### **Cátodo com a superfície lateral isolada**

A aplicação do problema (A.1)-(A.5) a um cátodo cilíndrico de secção recta circular com a superfície lateral isolada, exige que a condição de fronteira (A.3) seja substituída por

$$BC : \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (\text{A.29})$$

Neste caso, a teoria de bifurcações desenvolvida por Benilov [35] permite determinar expressões analíticas para o comportamento assíptótico da distribuição de  $\psi$  na superfície frontal do cátodo na vizinhança dos pontos de bifurcação. No caso do primeiro modo mancha axialmente simétrico, a distribuição de  $\psi$  é a seguinte

$$\psi(r, 0; U) = \psi_w(U) - 5.677C_2J_0\left(3.832\frac{r}{R}\right)(U - U_G) + \dots, \quad (\text{A.30})$$

onde  $\psi_w(U)$  é o valor de  $\psi$  na superfície frontal do cátodo no caso do modo difuso para o valor de  $U$  considerado,  $C_2$  é uma constante facilmente calculável no âmbito da teoria desenvolvida em [35] e  $U_G$  é o valor da queda de tensão na camada de plasma junto ao cátodo correspondente ao ponto de bifurcação.

Para as condições consideradas nesta dissertação temos  $C_2 > 0$ . Uma vez que as perturbações descritas por (A.30) crescem proporcionalmente a  $U - U_i$  e a função  $J_0(3.832r/R)$  é decrescente e monótona no intervalo  $0 \leq r \leq R$ , facilmente se compreende que a expressão (A.30) descreve dois ramos da solução na vizinhança do ponto

de bifurcação: um ramo supercrítico para  $U > U_i$  com uma distribuição de  $\psi$  que apresenta um máximo no centro da superfície frontal do cátodo (modo com uma mancha no centro) e outro subcrítico para  $U < U_i$  com uma distribuição de  $\psi$  que apresenta um máximo ao longo de toda a margem da superfície frontal do cátodo (modo com uma mancha em anel localizada na margem).

As aproximações iniciais para obter as soluções supercrítica e subcrítica são construídas a partir da expressão (A.30) com  $U$  muito próximo do valor da tensão  $U_G$ . Como exemplo, nas condições da figura 3.12, o valor de  $U_G$ , calculado através da fórmula (4.26), é 13.41 V. Assim, usando a expressão (A.30) com, por exemplo  $U = 13.45$  V e  $U = 13.35$  V, construímos aproximações iniciais para as soluções supercrítica e subcrítica, respectivamente. Usando estas aproximações iniciais no problema (A.1)-(A.5), com a condição de fronteira (A.3) substituída por (A.29), obtemos soluções que pertencem ao ramo de baixa tensão da característica tensão-corrente do modo mancha axialmente simétrico (ver figura 3.12). Usando estas soluções e variando o valor de  $U$  construímos o ramo de baixa tensão do modo mancha axialmente simétrico.

Não é possível ultrapassar o mínimo da característica tensão-corrente. Por isso, as aproximações iniciais para o ramo de alta tensão são construídas por meio de um procedimento puramente numérico, através do qual é introduzida uma perturbação na solução subcrítica num único passo e depois removida gradualmente. Como exemplo, a solução subcrítica correspondente a  $U = 13.35$  V pode ser usada como aproximação inicial para o problema (A.1)-(A.5) com a condição de fronteira (A.3) substituída por (A.28) com  $s = 0.05$ . Uma vez obtida convergência, usa-se a solução entretanto obtida como aproximação inicial para o problema (A.1)-(A.5) com a condição de fronteira (A.3) substituída por (A.28) com  $s$  a variar lentamente desde  $s = 0.05$  até  $s = 0$ . Uma vez obtida convergência para  $s = 0$ , obtemos uma solução que pertence ao ramo de alta tensão da característica tensão-corrente do modo mancha axialmente simétrico (ver figura 3.12). Usando esta solução e variando  $U$  construímos o ramo de alta tensão do modo mancha axialmente simétrico.

### **Cátodo com a superfície lateral activa**

Uma vez obtida a característica tensão-corrente correspondente ao caso de um cátodo com a superfície lateral isolada, a construção da correspondente característica para o caso de um cátodo com a superfície lateral activa é imediata. Assim, por exemplo, usando as soluções correspondentes aos estados  $A$  e  $F$  da característica tensão corrente do modo mancha axialmente simétrico no caso de um cátodo com a superfície lateral isolada (ver figura 3.12) como aproximações iniciais do problema (A.1)-(A.5) com a



condição de fronteira (A.3) substituída por (A.28) e variando lentamente o valor de  $s$  de 0 até 1, uma vez obtida convergência para  $s = 1$ , obtemos as soluções correspondentes aos estados  $A$  e  $F$  da característica tensão-corrente para o caso de um cátodo com a superfície lateral activa (ver figura 3.6). Usando estas soluções e variando o valor de  $U$  construímos os dois ramos da característica tensão-corrente do modo mancha axialmente simétrico.

### **A.4.3 Mancha solitária**

No caso do modo mancha solitária as condições de fronteira (A.3) e (A.4) do problema (A.1)-(A.5) são substituídas por

$$BC : \quad R \frac{\partial \psi}{\partial r} + z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi = 0, \quad (\text{A.31})$$

$$CD : \quad r \frac{\partial \psi}{\partial r} + h \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi = 0, \quad (\text{A.32})$$

em conformidade com a expressão (3.5). A aproximação inicial utilizada no problema (A.1)-(A.5) com as condições de fronteira (A.3) e (A.4) substituídas por (A.31) e (A.32), respectivamente, foi uma solução pertencente ao ramo de alta tensão do modo mancha axialmente simétrico no caso de um cátodo com  $R = h = 10$  mm nas condições da figura 3.16. Assim, por exemplo, usando como aproximação inicial a solução modo mancha para um determinado valor de  $U$ , uma vez obtida convergência, obtemos uma solução pertencente ao modo mancha solitária (linha pontuada na figura 3.16) para esse valor de  $U$ . Usando esta solução e variando o valor de  $U$  construímos a característica tensão-corrente do modo mancha solitária.

# Referências bibliográficas

- [1] J. R. Roth, *Industrial Plasma Engineering: Principles*, vol. 1. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2000.
- [2] Y. P. Raizer, *Gas Discharge Physics*. Berlin: Springer, 1991.
- [3] B. Jüttner, “Cathode spots of electric arcs,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 34, no. 17, pp. R103–123, 2001.
- [4] M. I. Boulos, P. Fauchais, and E. Pfender, *Thermal Plasmas: Fundamentals and Applications*, vol. 1. New York: Plenum Press, 1994.
- [5] Y. V. Tsvetkov, “Plasma processes in metallurgy,” in *Thermal Plasma and New Materials Technology* (O. P. Solonenko and M. F. Zhukov, eds.), vol. 2, pp. 292–323, Cambridge: Cambridge Interscience Publishing, 1995.
- [6] S. F. Paul, “Review of thermal plasma research and development for hazardous waste remediation in the United States,” in *Proceedings of the International School of Plasma Physics "Piero Caldirola", Varenna, Italy, Sept. 1995* (R. Benocci, G. Bonizzoni, and E. Sindoni, eds.), pp. 67–86, Singapore: World Scientific Publishing, 1996.
- [7] J. F. Lancaster, ed., *The Physics of Welding*. Pergamon Press, 2nd ed., 1986.
- [8] A. N. Greenwood, “Vacuum arc applications,” in *VACUUM ARCS Theory and Application* (J. M. Lafferty, ed.), pp. 321–360, New York: John Wiley, 1980.
- [9] E. Fischer, “Modelling of low-power high-pressure discharge lamps,” *Philips J. Res.*, vol. 42, no. 1, pp. 58–85, 1987.
- [10] M. S. Rea, “Lighting and seeing, the difference between night and day,” in *Proceedings of the 8th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Greifswald, Germany, Sept. 1998* (G. Babucke, ed.), pp. 120–128, Greifswald: Institute for Low-Temperature Plasma Physics, 1998. (Available from the British Library, ISBN 3-00-003105-7.).

- [11] K. Günther, “High-pressure plasma light sources,” in *Low Temperature Plasma Physics: Fundamental Aspects and Applications* (R. Hippler, S. Pfau, M. Schmidt, and K. H. Schoenbach, eds.), pp. 407–431, Berlin: WILEY-VCH, 2001.
- [12] J. F. Waymouth, *Electrical Discharge Lamps*. Cambridge, MA: MIT Press, 1971.
- [13] G. G. Lister, “Low-pressure discharge light sources,” in *Low Temperature Plasma Physics: Fundamental Aspects and Applications* (R. Hippler, S. Pfau, M. Schmidt, and K. H. Schoenbach, eds.), pp. 387–406, Berlin: WILEY-VCH, 2001.
- [14] W. van Erk, “Transport processes in metal halide gas discharge lamps,” *Pure Appl. Chem.*, vol. 72, no. 11, pp. 2159–2166, 2000.
- [15] D. C. Fromm, G. H. Lieder, and K. H. Gleixner, “Investigation of the connection between plasma temperature and electrode temperature in metal-halide lamps,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 35, no. 14, pp. 1668–1680, 2002.
- [16] E. Fischer, “Ultra high performance discharge lamps for projection TV systems,” in *Proceedings of the 8th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Greifswald, Germany, Sept. 1998* (G. Babucke, ed.), pp. 36–42, Greifswald: Institute for Low-Temperature Plasma Physics, 1998. (Available from the British Library, ISBN 3-00-003105-7.).
- [17] G. Derra, H. Moench, E. Fischer, and X. Riederer, “New UHP technologies for video projection,” in *Proceedings of the 9th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Cornell University, Ithaca, Aug. 2001* (R. S. Bergman, ed.), (Ithaca, NY), pp. 31–41, Cornell University Press, 2001.
- [18] M. S. Benilov, “Modeling of a non-equilibrium cylindrical column of a low-current arc discharge,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 27, no. 5, pp. 1458–1463, 1999.
- [19] M. S. Benilov and G. V. Naidis, “Modelling of low-current discharges in atmospheric-pressure air taking account of non-equilibrium effects,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 36, no. 15, pp. 1834–1841, 2003.
- [20] M. Capitelli, C. M. Ferreira, B. F. Gordiets, and A. I. Osipov, *Plasma Kinetics in Atmospheric Gases*. Berlin: Springer, 2000.
- [21] J. F. Waymouth, “Analysis of cathode-spot behavior in high-pressure discharge lamps,” *J. Light and Vis. Env.*, vol. 6, no. 2, pp. 53–64, 1982.

- [22] I. I. Beilis, “State of the theory of vacuum arcs,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 29, no. 5, pp. 657–670, 2001.
- [23] W. Thouret, W. Weizel, and P. Günther, “Lichtbögen mit brennfleck und ohne brennfleck,” *Z. Physik*, vol. 130, pp. 621–631, 1951.
- [24] S. Lichtenberg, D. Nandelstädt, L. Dabringhausen, M. Redwitz, J. Luhmann, and J. Mentel, “Observation of different modes of cathodic arc attachment to HID electrodes in a model lamp,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 35, no. 14, pp. 1648–1656, 2002.
- [25] W. Neumann, *The Mechanism of the Thermoemitting Arc Cathode*. Berlin: Akademie-Verlag, 1987.
- [26] W. L. Bade and J. M. Yos, *Theoretical and Experimental Investigation of Arc Plasma-Generation Technology. Part II, Vol. 1: A Theoretical and Experimental Study of Thermionic Arc Cathodes. Technical Report No. ASD-TDR-62-729*. Mass., USA: Avco Corporation, 1963.
- [27] I. Beilis, “Theoretical modeling of cathode spot phenomena,” in *Handbook of Vacuum Arc Science and Technology: Fundamentals and Applications* (R. L. Boxman, D. M. Sanders, and P. J. Martin, eds.), pp. 208–256, Park Ridge, N.J., U.S.A.: Noyes Publications, 1995.
- [28] E. Hantzsche, “Mysteries of the arc cathode spot: A retrospective glance,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 31, no. 5, pp. 799–808, 2003.
- [29] B. Y. Moizhes and V. A. Nemchinskii, “High-pressure arc with a refractory cathode. II,” *Sov. Phys. Tech. Phys.*, vol. 18, no. 11, pp. 1460–1464, 1974.
- [30] B. Y. Moizhes and V. A. Nemchinskii, “On the theory of a cylindrical cathode in a high-pressure arc,” *Sov. Phys. Tech. Phys.*, vol. 20, no. 6, pp. 757–762, 1975.
- [31] V. A. Nemchinskii, “Theory of the vacuum arc,” *Sov. Phys. Tech. Phys.*, vol. 24, no. 7, pp. 764–771, 1979.
- [32] M. S. Benilov, “Nonlinear heat structures and arc-discharge electrode spots,” *Phys. Rev. E*, vol. 48, no. 1, pp. 506–515, 1993.
- [33] M. S. Benilov, “A self-consistent analytical model of arc spots on electrodes,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 22, no. 1, pp. 73–77, 1994.

- [34] M. S. Benilov, “Maxwell’s construction for non-linear heat structures and determination of radius of arc spots on cathodes,” *Physica Scripta*, vol. 58, no. 4, pp. 383–386, 1998.
- [35] M. S. Benilov, “Nonlinear surface heating of a plane sample and modes of current transfer to hot arc cathodes,” *Phys. Rev. E*, vol. 58, no. 5, pp. 6480–6494, 1998.
- [36] H. Haken, *Synergetics, An Introduction*, vol. 1 of *Springer Series in Synergetics*. Berlin: Springer, 1978.
- [37] R. Böttcher and W. Böttcher, “Numerical modelling of arc attachment to cathodes of high-intensity discharge lamps,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 33, no. 4, pp. 367–374, 2000.
- [38] R. Böttcher and W. Böttcher, “Numerical modelling of a dynamic mode change of arc attachment to cathodes of high-intensity discharge lamps,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 34, no. 7, pp. 1110–1115, 2001.
- [39] R. Böttcher and W. Böttcher, “Numerical modelling of the dynamic ESV electrode sheath voltage for a 0.62 MPa mercury discharge,” in *Proceedings of the 9th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Cornell University, Ithaca, Aug. 2001* (R. S. Bergman, ed.), (Ithaca, NY), pp. 207–208, Cornell University Press, 2001.
- [40] R. Böttcher, W. Graser, and A. Kloss, “Cathodic arc attachment in a HID model lamp during a current step,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 37, no. 1, pp. 55–63, 2004.
- [41] S. Coulombe, “Arc-cathode attachment modes in high-pressure arcs,” in *Bull. Amer. Phys. Soc., Vol. 45, No. 6, 53rd Gaseous Electronics Conference*, p. 18, American Physical Society, 2000.
- [42] T. Krücken, “Simulations of electrode temperatures in HID lamps,” in *Proceedings of the 9th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Cornell University, Ithaca, Aug. 2001* (R. S. Bergman, ed.), (Ithaca, NY), pp. 267–268, Cornell University Press, 2001.
- [43] W. Graser, “Simulation of spot-diffuse transitions on AC-operated HID lamp electrodes,” in *Proceedings of the 9th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Cornell University, Ithaca, Aug. 2001* (R. S. Bergman, ed.), (Ithaca, NY), pp. 211–212, Cornell University Press, 2001.

- [44] H. Schmitz and K.-U. Riemann, “Analysis of the cathodic region of atmospheric pressure discharges,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 35, no. 14, pp. 1727–1735, 2002.
- [45] V. A. Nemchinsky, “Current density at the refractory cathode of a high-current high-pressure arc (two modes of cathode spot attachment),” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 36, no. 23, pp. 3007–3013, 2003.
- [46] G. A. Mesyats, “Ecton mechanism of the vacuum arc cathode spot,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 23, no. 6, pp. 879–883, 1995.
- [47] G. Ecker, “Unified analysis of the metal vapour arc,” *Z. Naturforsch.*, vol. 28a, no. 3/4, pp. 417–428, 1973.
- [48] J. Luhmann, D. Nandelstädt, B. Micheldt, and J. Mentel, “Experimental determination of the cathode fall in a high pressure low current argon arc,” in *Proceedings of the 8th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Greifswald, Germany, Sept. 1998* (G. Babucke, ed.), (Greifswald), pp. 352–353, Institute for Low-Temperature Plasma Physics, 1998. (Available from the British Library, ISBN 3-00-003105-7.).
- [49] M. S. Benilov and A. Marotta, “A model of the cathode region of atmospheric pressure arcs,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 28, no. 9, pp. 1869–1882, 1995.
- [50] V. A. Nemchinsky, “Life time of a refractory cathode doped with a work-function-lowering dopant,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 29, no. 9, pp. 2417–2422, 1996.
- [51] R. S. Devoto, “Transport coefficients of ionized argon,” *Phys. Fluids*, vol. 16, no. 5, pp. 616–623, 1973.
- [52] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959.
- [53] W. Hu, F. P. Dawson, and M. S. Benilov, “Modelling of cathode heating in vortex-water-wall-high-pressure-argon-arc lamps,” in *Proceedings of the 8th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources (Greifswald, Germany, Sept. 1998)* (G. Babucke, ed.), pp. 306–307, Greifswald: Institute for Low-Temperature Plasma Physics, 1998.
- [54] J. Wendelstorf, “Two-temperature, two-dimensional modelling of cathode-plasma interaction in electric arcs,” in *Proceedings, Contributed Papers, XXIV International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Warsaw, 1999*

- (P. Pisarczyk, T. Pisarczyk, and J. Wolowski, eds.), vol. 2, pp. 227–228, Warsaw: Institute of Plasma Physics and Laser Microfusion, 1999. (Available from the British Library, ISBN 83-902319-5-6.).
- [55] T. Nielsen, A. Kaddani, and M. S. Benilov, “Model for arc cathode region in a wide pressure range,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 34, no. 13, pp. 2016–2021, 2001.
- [56] G. M. Janssen, J. van Dijk, D. A. Benoy, M. A. Tas, K. T. A. L. Burm, W. J. Goedheer, J. A. M. van der Mullen, and D. C. Schram, “Plasimo, a general model: I. Applied to an argon cascaded arc plasma,” *Plasma Sources Science and Technology*, vol. 8, no. 1, pp. 1–14, 1999.
- [57] P. Flesch, H. Wiesmann, and M. Neiger, “Modelling of high pressure discharge lamps including electrodes,” in *Proceedings of the 8th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Greifswald, Germany, Sept. 1998* (G. Babucke, ed.), (Greifswald), pp. 394–395, Institute for Low-Temperature Plasma Physics, 1998. (Available from the British Library, ISBN 3-00-003105-7.).
- [58] P. Flesch and M. Neiger, “Rigorous derivation of a non-LTE electrical conductivity for electrode regions of high-pressure discharge lamps,” in *Proceedings of the 8th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Greifswald, Germany, Sept. 1998* (G. Babucke, ed.), (Greifswald), pp. 406–407, Institute for Low-Temperature Plasma Physics, 1998. (Available from the British Library, ISBN 3-00-003105-7.).
- [59] P. Flesch and M. Neiger, “Modeling of high pressure discharge lamps including electrodes,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 27, no. 1, pp. 18–19, 1999.
- [60] P. Flesch and M. Neiger, “Time-dependent modeling of high pressure discharge lamps including electrodes,” in *Proceedings of the 9th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Cornell University, Ithaca, Aug. 2001* (R. S. Bergman, ed.), (Ithaca, NY), pp. 307–308, Cornell University Press, 2001.
- [61] P. Flesch and M. Neiger, “Numerical simulation of dc high-pressure discharge lamps including electrodes,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 35, no. 14, pp. 1681–1694, 2002.

- [62] P. Flesch and M. Neiger, “Time-dependent simulation of plasma and electrodes in high-intensity discharge lamps with different electrode shapes,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 36, no. 7, pp. 849–860, 2003.
- [63] M. Mitchner and C. H. Kruger, *Partially Ionized Gases*. New York: Wiley, 1973.
- [64] M. S. Benilov, “Analysis of ionization non-equilibrium in the near-cathode region of atmospheric-pressure arcs,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 32, no. 3, pp. 257–262, 1999.
- [65] R. M. S. Almeida, M. S. Benilov, and G. V. Naidis, “Simulation of the layer of non-equilibrium ionization in a high-pressure argon plasma with multiply charged ions,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 33, no. 8, pp. 960–967, 2000.
- [66] M. S. Benilov, “The ion flux from a thermal plasma to a surface,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 28, no. 2, pp. 286–294, 1995.
- [67] M. S. Benilov and G. V. Naidis, “Ionization layer at the edge of a fully ionized plasma,” *Phys. Rev. E*, vol. 57, no. 2, pp. 2230–2241, 1998.
- [68] G. S. Voronov, “A practical fit formula for ionization rate coefficients of atoms and ions by electron impact:  $Z=1-28$ ,” *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, vol. 65, no. 1, pp. 1–35, 1997.
- [69] E. L. Murphy and R. H. Good, “Thermionic emission, field emission, and the transition region,” *Phys. Rev.*, vol. 102, no. 6, pp. 1464–1473, 1956.
- [70] L. Dabringhausen Private Communication, Bochum, Aug., 2002.
- [71] S. W. H. Yih and C. T. Wang, *Tungsten: Sources, Metallurgy, Properties, and Applications*. New York: Plenum Press, 1979.
- [72] L. Dabringhausen, D. Nandelstädt, J. Luhmann, and J. Mentel, “Determination of HID electrode falls in a model lamp i: Pyrometric measurements,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 35, no. 14, pp. 1621–1630, 2002.
- [73] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 1992.
- [74] A. A. Samarskii, *Teoria de Esquemas em Diferenças Finitas*. Moscow: Nauka, 1977. Em Russo.
- [75] A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Numerical Methodes for Grid Equations: Direct Methodes*, vol. 1. Birkhäuser, 1989.



- [76] A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Computational Heat Transfer: Mathematical Modelling*, vol. 1. John Wiley, 1995.
- [77] Y. S. Touloukian, R. W. Powell, C. Y. Ho, and P. G. Clemens, *Thermal Conductivity. Metallic Elements and Alloys*. Thermophysical Properties of Matter, vol. 1, New York-Washington: IFI/Plenum, 1970.
- [78] M. S. Benilov Private Communication, Funchal, July, 1995.
- [79] G. K. White and M. L. Minges, “Thermophysical properties of some key solids: An update,” *Int. J. Thermophys.*, vol. 18, no. 5, pp. 1269–1327, 1997.
- [80] J. G. Hust and A. B. Lankford, “Update of thermal conductivity and electrical resistivity of electrolytic iron, tungsten, and stainless steel.” National Bureau of Standards Special Publication, 260-290, Sept. 1984.
- [81] D. Nandelstädt, J. Luhmann, B. Micheldt, and J. Mentel Private Communication, Bochum, July, 1998.
- [82] J. Luhmann, D. Nandelstädt, A. Barzik, and J. Mentel, “Measurements of the cathode fall in a high pressure argon model lamp,” in *Proceedings, Contributed Papers, XXIV International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Warsaw, 1999* (P. Pisarczyk, T. Pisarczyk, and J. Wolowski, eds.), vol. 1, pp. 13–14, Warsaw: Institute of Plasma Physics and Laser Microfusion, 1999. (Available from the British Library, ISBN 83-902319-5-6.).
- [83] J. Mentel, J. Luhmann, and D. Nandelstädt, “Experimental investigation of electrodes of high pressure discharge lamps,” in *Proc. 2000th IEEE Conf. On Industry Applications (Rome, Oct. 2000)*, IEEE, 2000.
- [84] J. Mentel, L. Dabringhausen, S. Lichtenberg, J. Luhmann, D. Nandelstädt, and M. Redwitz, “Diagnostics of HID electrodes,” in *Proceedings of the 9th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Cornell University, Ithaca, Aug. 2001* (R. S. Bergman, ed.), (Ithaca, NY), pp. 177–188, Cornell University Press, 2001.
- [85] J. Luhmann, S. Lichtenberg, O. Langenscheidt, M. S. Benilov, and J. Mentel, “Determination of HID electrode falls in a model lamp ii: langmuir-probe measurements,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 35, no. 14, pp. 1631–1638, 2002.
- [86] D. Nandelstädt, M. Redwitz, L. Dabringhausen, J. Luhmann, S. Lichtenberg, and J. Mentel, “Determination of HID electrode falls in a model lamp III: Results

- and comparison with theory,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 35, no. 14, pp. 1639–1647, 2002.
- [87] R. Morrow and J. J. Lowke, “A one-dimensional theory for the electrode sheaths of electric arcs,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 26, no. 4, pp. 634–642, 1993.
- [88] H. Schmitz and K.-U. Riemann, “Theoretical modelling of the cathodic region of high intensity discharge lamps,” in *Proceedings of the 8th International Symposium on the Science and Technology of Light Sources, Greifswald, Germany, Sept. 1998* (G. Babucke, ed.), (Greifswald), pp. 390–391, Institute for Low-Temperature Plasma Physics, 1998. (Available from the British Library, ISBN 3-00-003105-7.).
- [89] M. S. Benilov, “Heating of cathodes of high-pressure arc discharges,” in *Proc. 14th Int. Symp. On Plasma Chemistry (Prague, August 1999)* (M. Hrabovsky, M. Konrad, and V. Kopecky, eds.), vol. I, (Prague), pp. 55–60, Institute of Plasma Physics, 1999.
- [90] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II. New York: Wiley, 1962.
- [91] M. Ushio, A. Sadek, and F. Matsuda, “Comparison of temperature and work function measurements obtained with different GTA electrodes,” *Plasma Chemistry and Plasma Processing*, vol. 11, no. 1, pp. 81–101, 1991.
- [92] J. Haidar and A. J. D. Farmer, “A method for the measurement of the cathode surface temperature for a high-current free-burning arc,” *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 64, no. 2, pp. 542–546, 1993.
- [93] J. Haidar and A. J. D. Farmer, “Temperature measurements for high-current free-burning arcs in nitrogen,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 26, no. 7, pp. 1224–1229, 1993.
- [94] J. Haidar and A. J. D. Farmer, “Large effect of cathode shape on plasma temperature in high-current free-burning arcs,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 27, no. 3, pp. 555–560, 1994.
- [95] J. Haidar and A. J. D. Farmer, “Surface-temperature measurements for tungsten-based cathodes of high-current free-burning arcs,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 28, no. 10, pp. 2089–2094, 1995.
- [96] V. A. Nemchinsky and M. S. Showalter, “Cathode erosion in high-current high-pressure arc,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 36, no. 6, pp. 704–712, 2003.

- [97] J. Haidar, “A theoretical model for gas metal arc welding and gas tungsten arc welding. I,” *J. Appl. Phys.*, vol. 84, no. 7, pp. 3518–3529, 1998.
- [98] J. Luhmann, S. Lichtenberg, O. Langenscheidt, M. S. Benilov, and J. Mentel, “Determination of HID electrode falls in a model lamp II: Langmuir-probe measurements,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 35, no. 14, pp. 1631–1638, 2002.
- [99] M. S. Benilov and N. V. Pisannaya, “Mathematical modeling of constricted current flow to an electrode with a thermal resistance,” *Sov. Phys. - Tech. Phys.*, vol. 33, no. 11, pp. 1260–1266, 1988.
- [100] M. S. Benilov, “Appearance of structures with slow variations in large-size reaction-diffusion and current systems,” *Phys. Letters A*, vol. 169, no. 1,2, pp. 57–61, 1992.
- [101] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 42, New York: Springer-Verlag, 1983.
- [102] M. S. Benilov, “On the branching of solutions in the theory of the cathode sheath of a glow discharge,” *Sov. Phys. - Tech. Phys.*, vol. 33, no. 11, pp. 1267–1270, 1988.
- [103] M. S. Benilov, “Bifurcation analysis of the corona discharge on a negative electrode,” *Phys. Letters A*, vol. 228, no. 3, pp. 182 – 186, 1997.
- [104] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1965.
- [105] W. F. Ames, *Numerical Methodes for Partial Differential Equations*. Academic Press, 1992.
- [106] A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Numerical Methodes for Grid Equations: Iterative Methodes*, vol. 2. Birkhäuser, 1989.
- [107] A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Computational Heat Transfer: The Finite Difference Methodology*, vol. 2. John Wiley, 1995.